

Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Lehrstuhl für Strömungsmechanik und
Strömungsmaschinen
PROF. DR.-ING. M. BÖHLE

Masterarbeit

Titel der Arbeit:

Berechnung der kompressiblen Profilmströmungen mit einem aus der nichtlinearen Potentialgleichung abgeleiteten, direkten Verfahren

*Calculation of the compressible flows over a profile with a direct method derived from
the non-linear potential theory*

von

Maximilian Blechner

Matr.-Nr. 409350

Institut

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt Institut für
Raumfahrtantriebe, Lampoldshausen

Betreuer am Institut

Wolfgang Kitsche

Betreuer der Hochschule

Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle

LAMPOLDSHAUSEN, DEZEMBER 2020

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die aufgelisteten Quellen zur Erstellung der Arbeit verwendet habe.

Lampoldshausen, 08. Dezember 2020

Maximilian Blechner

Kurzfassung

Bei subsonischen Profilmströmungen im aerodynamischen Bereich treten bei höheren Machzahlen Kompressibilitätseffekte auf, die sich bei reeller Darstellung nicht mehr vernachlässigen lassen. Hier stößt die herkömmliche mathematische Modellierung der Potentialtheorie an ihre Grenzen. Zur Modellierung der variablen Dichte müssen zwangsläufig komplexere Wege gegangen werden. Hier werden normalerweise aufwendige CFD-Berechnungen durchgeführt, die rechen- und zeitintensiv sind. In dieser Arbeit wird mithilfe des Impulspotentials, welches aus der Potentialtheorie abgeleitet wird, ein Programm geschrieben, welches die kompressible Umströmung, mittels einem Panelverfahren eines beliebigen Profils berechnet. Der Vorteil dieser Berechnung ist, dass die Ergebnisse, zum Beispiel der c_p Verlauf, in wenigen Sekunden berechnet werden können. Auch kann auf aufwendiges Preprocessing verzichtet werden, da kein Rechennetz generiert werden muss. Zur Verifizierung und der Lokalisierung von Schwächen oder Stärken werden die berechneten Ergebnisse mit Messwerten aus einem Windkanal verglichen.

Abstract

In the case of subsonic profile currents in the aerodynamic range, compressibility effects occur at higher Mach (machination) figures, which can no longer be discounted with real representation. This is where the conventional mathematical modeling of velocity potential theory stumbles to its limits. For the modeling of the variable density more complex paths were inevitably taken. Here, normally complex CFD calculations are performed, which are computational and time intensive. In this work, a program is written using the impulse potential, which is derived from the velocity potential theory, which describes/ calculates the compressible flow, by means of a panel method of any profile with the numerical panel method. The advantage of these calculation is that the results, for example the c_p curve, can be calculated immediatly. Complex preprocessing can also be avoided, since no calculation network has to be generated. For the verification and localization of weaknesses or strengths, the calculated results are compared with measured values from a wind tunnel.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Formelzeichen und Indizes	VII
1. Einleitung	1
2. Grundlagen und Theorie	2
2.1. Strömungsmechanische Grundlagen	2
2.1.1. Grundlegende Variablen zur Beschreibung einer Strömung . . .	2
2.1.2. Betrachtungsweise der Strömung	3
2.1.3. Grundgleichungen in der Strömungsmechanik	4
2.1.3.1. Massenbilanz	4
2.1.3.2. Navier–Stokes Gleichungen (Impulserhaltung)	5
2.1.3.3. Energieerhaltung	6
2.2. Thermodynamische Grundlagen	8
2.2.1. Zustandsgleichung	9
2.2.2. Erster Hauptsatz der Thermodynamik	9
2.2.3. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	11
2.2.4. Definition der Totalgrößen	12
2.3. Aerodynamische Grundlagen	12
2.3.1. Das Geschwindigkeitspotential	12
2.3.2. Elementarströmungen	13
2.3.3. Superposition	16
2.3.4. Panelverfahren	16
3. Impulspotential	21
3.1. Definition und Bilanzierung	21
3.2. Berechnung der Feldgrößen	22
3.3. Isentrope Betrachtung	23
4. Numerisches Berechnungsmodell	26
4.1. Numerisches Berechnungsverfahren mit foil	26
4.1.1. Bildung der Einflussmatrix	27
4.2. Numerisches Berechnungsverfahren mit XFOIL	29
5. Vergleich mit Messergebnissen	31
5.1. Vergleich inkompressibler Berechnungen	31

5.2. Vergleich kompressibler Berechnungen ohne Berücksichtigung der Rotation	32
6. Resümee	36
6.1. Entropiezunahme bei Verzögerungsvorgang	36
6.2. Modellierung der Rotation mit Starrkörperrotation	37
6.3. Wirbelmodellierung nach Hamel und Oseem	42
7. Ausblick	45
Literaturverzeichnis	48
A. Anhang	49
A.1. Vergleich der Berechnungen mit Messreihe 2	49
A.2. Berechnungscode	51

Abbildungsverzeichnis

2.1. Anliegende nichtviskose Umströmung (links) und Umströmung mit Ablösung und viskosen Effekten (rechts) [And84]	3
2.2. Ein- und ausströmende Massenströme (angelehnt an [Her14])	5
2.3. Ein- und ausströmende Impulsströme (links) und Normalspannungen sowie Schubspannungen (rechts) (angelehnt an [Her14])	6
2.4. Energiebilanz an einem Flächenelement (angelehnt an [Her14])	7
2.5. Zustandsänderung auf eine andere Temperatur [Gan87]	10
2.6. Gleichförmige Strömung (angelehnt an [And84])	13
2.7. Quellenströmung (links) und Senkenströmung (rechts) (angelehnt an [And84])	14
2.8. Zirkulationsströmung (angelehnt an [And84])	15
2.9. Überlagerung einer gleichförmigen Strömung und einer Quelle (angelehnt an [And84])	16
2.10. Paneleinteilung eines Körpers (angelehnt an [And84])	17
2.11. Vergrößerung der Hinterkante (angelehnt an [And84])	20
3.1. Schematischer Verlauf der Enthalpie bei der Beschleunigung nach Staupunkt bei $s = konst$	24
3.2. Schematischer Verlauf der Enthalpie bei Beschleunigung nach dem Staupunkt mit verminderter Totaltemperatur bei $s = konst$	25
4.1. Erforderliche Geometrieangaben der Panel zur Bildung von J_{ij} (angelehnt an [And84])	27
4.2. Profilrohdaten [TK89] und Verfeinerung	30
5.1. Vergleichsrechnung inkompressibler Umströmung	32
5.2. Vergleich der Berechnungen des Druckbeiwertes mit den Messwerten aus der Messreihe <i>VicToria_II_11.18_Profil_00530011</i> [CHK18]	34
5.3. Vergleich der lokalen Machzahlen der Berechnung mit dem Impulspotentialansatz und der Messreihe <i>VicToria_II_11.18_Profil_00530011</i> [CHK18]	35
6.1. Schematische Darstellung der Rotation der Strömung	38
6.2. Vergleich der c_p -Verläufe zwischen Messergebnissen [CHK18] und Ansätze der Impulspotentialtheorie	40

6.3. Vergleich der c_p -Verläufe zwischen Messergebnissen [CHK18] und Ansätze der Impulspotentialtheorie und den Berechnungen aus der Geschwindigkeitspotentialtheorie	41
6.4. Geschwindigkeitsübergang von Starrkörperwirbel zu Potentialwirbel (angelehnt an [Hei13])	42
6.5. Vergleich der Druckbeiwerte mit der Wirbelmodellierung nach Hamel Oseem (Messdaten [CHK18])	44
7.1. Umkehrung des Fehlers an der Unterseite des Profils (Messdaten [CHK18])	46
A.1. Vergleich der Berechnungen des Druckbeiwertes mit den Messwerten aus der Messreihe <i>VicToria_II_11.18_Profil_00530017</i> [CHK18]	49
A.2. Vergleich der lokalen Machzahlen der Berechnung mit dem Impulspotentialansatz und der Messreihe <i>VicToria_II_11.18_Profil_00530011</i> [CHK18]	50

Formelzeichen und Indizes

Zeichen	Einheit	Benennung
A, B, C, D, E	—	Platzhalter
\dot{A}	J/s	Spannungsarbeit
a	m/s	Schallgeschwindigkeit
c	—	Konstante
c_p	—	Druckbeiwert
$c_{p,korr}$	—	korrigierter Druckbeiwert
$c_{p,w}$	$J/(kg\ K)$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_v	$J/(kg\ K)$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
E_{ges}	J	Gesamtenergie
E_{kin}	J	kinetische Energie
\dot{E}	J/s	Gesamtenergiestrom
e	J/kg	spezifische Energie
e_{kin}	J/kg	spezifische kinetische Energie
e_{trans}	J/kg	spezifische translatorische Energie
e_{rot}	J/kg	spezifische rotatorische Energie
h_0	J/kg	spezifische Totalenthalpie
$f(k)$	—	Funktionswert (Newton Verfahren)
h	J/kg	spezifische Enthalpie
I_{ij}, J_{ij}	—	Einflussmatrix
k_B	J/K	Boltzmann Konstante
$k_{n,n+1,n-1}$	—	Variable (Newton Verfahren)
$k_{v,i}$	N/m^3	Volumenkräfte
l	m	Länge
M	—	Machzahl
\dot{m}	kg/s	Massenstrom
\dot{m}_{red}	$\sqrt{K}\ kg/N$	reduzierter Massenstrom
$\dot{m}_{red,max}$	$\sqrt{K}\ kg/N$	maximaler reduzierter Massenstrom
n_i	m	Normalenvektor
p	Pa	statischer Druck
p_0	Pa	Totaldruck
p_{dyn}	Pa	dynamischer Druck
p_∞	Pa	statischer Druck in der Anströmung
\dot{Q}	J/s	Wärmestrom

Zeichen	Einheit	Benennung
q	J/kg	spezifische Wärmemenge
q_{irrev}	J/kg	spezifische irreversible Wärmemenge
q_{rev}	J/kg	spezifische reversible Wärmemenge
\dot{q}	J/s	äußere Energiezufuhr
R_s	$J/(kg\ K)$	spezifische Gaskonstante
r	m	Radius
s	$J/(kg\ K)$	spezifische Entropie
s_j	m	Panellänge
s_v	—	Rotationsfaktor
T	K	Temperatur
T_0	K	Totaltemperatur
\dot{V}	m^3/s	Volumenstrom
v	m/s	Geschwindigkeit
v_∞	m/s	Anströmgeschwindigkeit
v_n	m/s	Normalengeschwindigkeit
v_{ges}	m/s	Gesamtgeschwindigkeit
v_{rot}	m/s	Rotationsgeschwindigkeit
v_r	m/s	Radialgeschwindigkeit
v_{tr}	m/s	Translatorische Geschwindigkeit
v_θ	m/s	Umfangsgeschwindigkeit
w	J/kg	spezifische Arbeit
w_{tech}	J/kg	spezifische technische Arbeit
x_i, x_j	m	X-Koordinate
y_i, y_j	m	Y-Koordinate
Y	—	Rotationsfaktor

Zeichen	Einheit	Benennung
α	$^\circ$	Anströmwinkel
β	$^\circ$	Winkel zur Panellnormalen
Γ	m^2/s	Wirbelstärke Zirkulation
γ	m/s	Quellstärke pro Länge
κ	—	Isentropenexponent
Λ	m^2/s	Quellstärke, Quellen und Senken
λ	m/s	Quellstärke pro Länge
λ_l	m	mittlere Weglänge

Zeichen	Einheit	Benennung
μ	Ns/m^2	dynamische Viskosität
θ	$^\circ$	Winkel
ρ	kg/m^3	Dichte
ρ_∞	kg/m^3	Dichte in der Anströmung
σ	N/m^2	Schubspannung
τ	N/m^2	Schubspannung
Φ	m^2/s	Geschwindigkeitspotentialfunktion
$\Phi_{i,j}$	$^\circ$	Winkel zwischen X-Achse und Panel i bzw. j
Φ_{diss}	$1/s^2$	Dissipationsfunktion
Ψ	m^2/s	Stromfunktion
ω	$kg\,m^2/s$	Impulspotential
ω_{rot}	$1/s$	Winkelgeschwindigkeit

1. Einleitung

Die Potentialtheorie und das daraus abgeleitete Panelverfahren ist eine vergleichsweise alte Herangehensweise Profilmströmungen zu betrachten und zu berechnen. Dennoch hat es, in gewissen Einsatzbereichen, gegenüber einer Berechnung mittels der Finiten–Volumen–Methode auch Vorteile.

In dieser Arbeit wird mittels einem aus der Potentialtheorie abgeleiteten Verfahren eine kompressible Profilmströmung berechnet und mit Messergebnissen verglichen. Dabei wird der Begriff des sogenannten Impulspotentials eingeführt. Dieses Potential wird innerhalb eines Panelverfahrens berechnet, um daraus die Druckverteilung über das Profil abzubilden.

Außerdem werden die Bilanzgleichungen für dieses Verfahren hergeleitet und auf etwaige Probleme bzw. Schwächen dieses Ansatzes hingewiesen. Ziel ist es aus der Idee des Impulspotentials ein Berechnungsverfahren zu konstruieren, welches innerhalb einer oder weniger Sekunden die Lösung präsentiert. Das zweite Ziel der Arbeit ist es, dieses Verfahren oder diese Herangehensweise physikalisch zu verifizieren. Hierzu werden die Bilanzgleichungen für diese isentrope Strömung hergeleitet und mit der geltenden Physik in Einklang gebracht werden können.

2. Grundlagen und Theorie

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen dargestellt, die zur Berechnung und Beurteilung der Profilmströmung notwendig sind. Da eine kompressible und verlustbehaftete Umströmung behandelt wird, werden bzw. müssen neben den strömungsmechanischen Auswirkungen auch die thermodynamischen und gasdynamischen Effekte innerhalb des zu berechnenden Gebietes betrachtet werden.

2.1. Strömungsmechanische Grundlagen

Die fundamentalen Gleichungen und Begriffe, die für diese kompressible aber stationäre Strömung relevant sind werden im Folgenden erläutert.

2.1.1. Grundlegende Variablen zur Beschreibung einer Strömung

Um eine Strömung in voller Gänze beschreiben zu können, müssen die Variablen Druck p , Dichte ρ , Temperatur T und die Geschwindigkeit v in jedem Punkt bekannt sein.

Der Druck ist definiert als Kraft pro Fläche. Die Kraftkomponente ist hierbei, diese die senkrecht auf die Oberfläche wirkt. Ausschlaggebend ist dabei die Impulskraft der Moleküle im Fluid, die sich bewegen und auf die Umgebung einwirken. Die Dichte ist definiert als Masse pro Volumen, gleichbedeutend mit der Anzahl der Moleküle auf einen begrenzten Raum.

Die Temperatur eines Gases ist direkt proportional zur kinetischen Energie der Moleküle (2.1), wobei k_B der Boltzmann Konstante entspricht.

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \quad (2.1)$$

Da diese Eigenschaften über die Molekularebene definiert werden, werden diese in der makroskopischen Betrachtung als Punkteigenschaften wahrgenommen.

Fluidgeschwindigkeiten werden als Vektor mit Betrag und Richtung in diskreten Punkten angegeben. Zur mathematischen Modellierung wird nun für jede Variable eine Gleichung benötigt. In der Regel sind dies die Navier–Stokes Gleichungen oder auch Impulsgleichungen, die Massenbilanz und die Energiebilanz. [And84]

2.1.2. Betrachtungsweise der Strömung

Technische Strömungen werden aufgrund ihrer physikalischen Eigenschaften eingeteilt. Diese verschiedenen Betrachtungsweisen sind maßgeblich für die Vereinfachungen, die in der mathematischen Modellierung getätigt werden können.

Eine Kontinuumsströmung zeichnet sich dadurch aus, dass die freie Weglänge λ_l zwischen den Molekülen des Fluids deutlich kleiner ist als die Größe des umströmten Körpers. Dies bedeutet, der Körper nimmt die Kollisionen mit den einzelnen Molekülen nicht als einzelne Impulse, sondern als kontinuierliche Umströmung wahr. Das Gegenteil dazu wäre eine Molekularströmung, bei der die freie Weglänge λ_l ähnliche Maße hätte wie der Körper. [And84]

Eine weitere Klassifizierung der Profilmströmung wird vorgenommen, indem bei dieser die viskosen Effekte vernachlässigt werden. In realen Strömungen herrschen viskose Effekte, durch Transport von Masse, Energie und Impuls. Durch jenen Transport kommt es dann zu Massendiffusion, Reibungseffekten und Wärmeübertragung auch quer zur Strömungsrichtung, diese allerdings werden, bei anliegender Umströmung und Reynoldszahlen gegen unendlich, gleich null. In der betrachtenden Profilmströmung liegen die Reynoldszahlen in einem ausreichend hohen Bereich, indem die Grenzschicht sehr klein wird und die viskosen Effekte somit vernachlässigbar werden. Bei Profilmströmungen mit Ablösung sind diese Effekte nicht mehr zu vernachlässigen (Abb. 2.1). [And84]

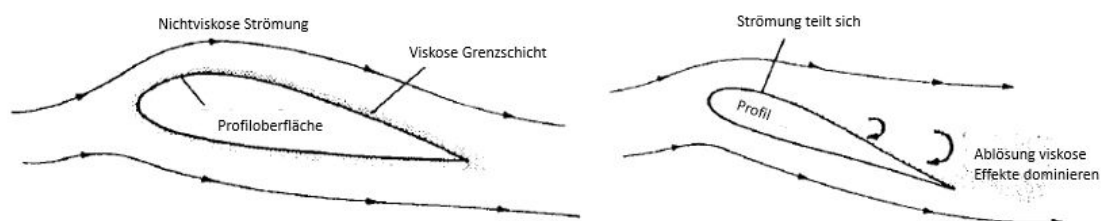


Abbildung 2.1.: Anliegende nichtviskose Umströmung (links) und Umströmung mit Ablösung und viskosen Effekten (rechts) [And84]

In dieser Arbeit werden Kompressibilitätseffekte von Profilmströmungen untersucht, daher ist es zwingend notwendig dieses Problem als ein kompressibles zu betrachten. Dies bedeutet die Dichte ρ ist nicht konstant über das Profil. Zusätzlich wird die Machzahl ausreichend groß $M > 0,3$ gewählt, sodass auch kompressible Effekte auftreten.

Allerdings muss bei der Machzahl der Anströmung einen Bereich gewählt werden, der Überschall in jedem Punkt der Strömung vermeidet. Da in diesem ersten Schritt der Einführung des Impulspotentials zwar kompressible Phänomene untersucht werden sollen, aber Verluste durch Verdichtungsstöße und generelle Überschalleffekte noch nicht berücksichtigt werden. Die Anströmmachzahl sollte daher je nach Profil die kritische Machzahl nicht übersteigen. Als Faustregel gilt hierbei $M_\infty < 0,8$. [And84]

2.1.3. Grundgleichungen in der Strömungsmechanik

Um eine Strömung in ihrer Gesamtheit mathematisch zu modellieren, sind die oben genannten Bilanzgleichungen vonnöten. Da die berechnete Profilmachströmung in dieser Arbeit zweidimensional ist, werden die Bilanzgleichungen auch nur in zwei Raumrichtungen erarbeitet.

2.1.3.1. Massenbilanz

Die Massenbilanz oder auch Kontinuitätsgleichung besagt, dass der einströmende Massenstrom in ein System auch gleichzeitig der ausströmende Massenstrom sein muss, da Masse weder zerstört noch erschaffen werden kann. Bezieht man diese Aussage auf ein Kontrollvolumen dV oder im Fall einer zweidimensionalen Strömung auf eine Kontrollfläche dA , so ergibt sich die zeitliche Änderung im Flächenelement durch Subtraktion der Summe der einströmenden Massenströme mit der Summe der ausströmenden Massenströme. Betrachtet wird nun ein solches Flächenelement (Abb. 2.2).

Die zeitliche Änderung der Masse in diesem Flächenelement wird durch die Subtraktion der einströmenden Masse mit der ausströmenden Masse bestimmt. Daraus resultiert für $i \neq j$ im zweidimensionalen Fall die Gleichung (2.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx_i \cdot dx_j = & \left(\rho \cdot v_i - \left(\rho \cdot v_i + \frac{\partial \rho \cdot v_i}{\partial x_i} \cdot dx_i \right) \right) \cdot dx_j + \\ & \left(\rho \cdot v_j - \left(\rho \cdot v_j + \frac{\partial \rho \cdot v_j}{\partial x_j} \cdot dx_j \right) \right) \cdot dx_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nach Auflösen der Gleichung (2.2) ergibt sich unter Berücksichtigung, dass eine stationäre, aber kompressible Strömung berechnet wird, dann die endgültige Massenbilanz (2.3).

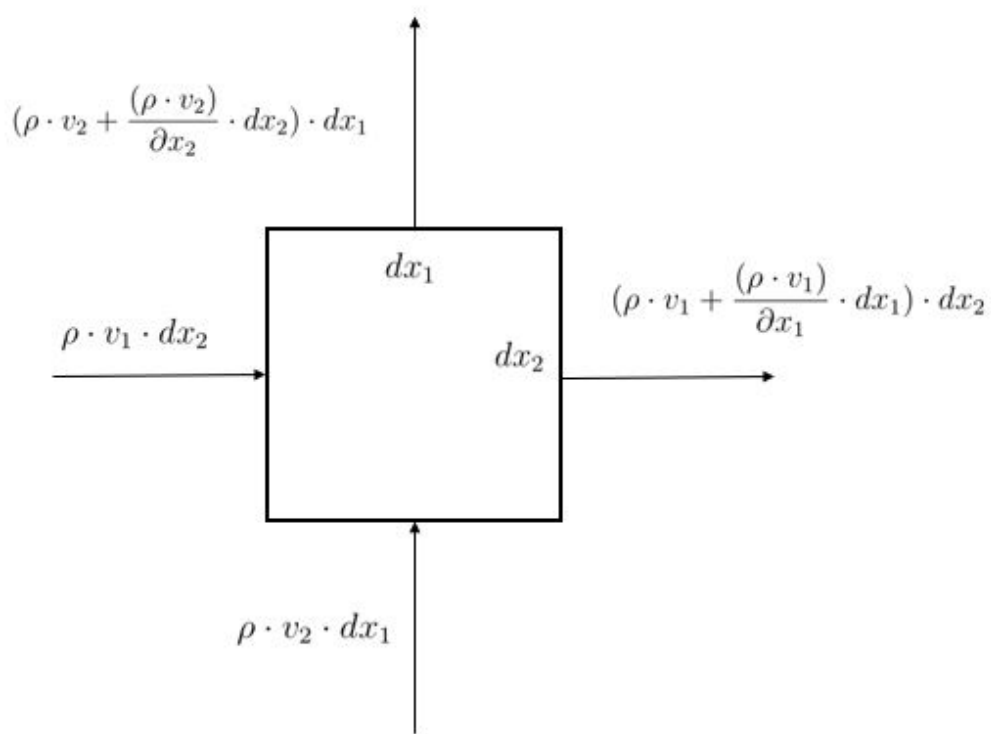


Abbildung 2.2.: Ein- und ausströmende Massenströme (angelehnt an [Her14])

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

2.1.3.2. Navier–Stokes Gleichungen (Impulserhaltung)

Die Navier–Stokes Gleichungen beschreiben die Erhaltung des Impulses innerhalb eines Systems. Deren Herleitung findet oft anhand eines infinitesimalen Volumenelements oder Flächenelements statt.

Der allgemeine Ansatz der Herleitung ist dabei analog zur Massenbilanz. In einem Flächen– oder Volumenelement ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der einströmenden Impulse abzüglich der ausströmenden. Zusätzlich müssen die auf das Element wirkenden Scherkräfte und Normalspannungen beachtet werden. Zuletzt werden die Kräfte, die auf die Masse wirken hinzugenommen. Bei Darstellung dieser Impulse an einem Flächenelement (Abb. 2.3) und anschließender Bilanzierung, ergibt sich dadurch die Impulsgleichung im zweidimensionalen Raum (2.4).

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i \cdot v_j)}{\partial x_j} = k_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (2.4)$$

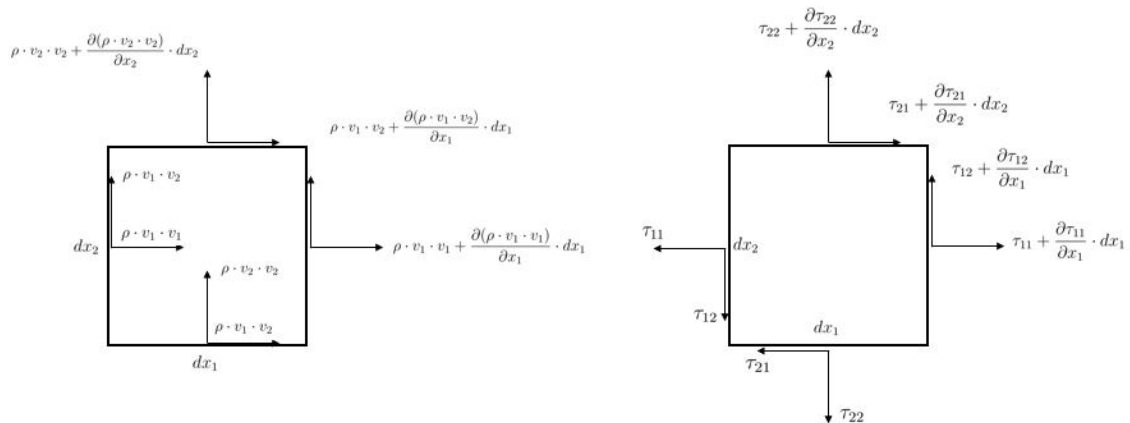


Abbildung 2.3.: Ein- und ausströmende Impulsströme (links) und Normalspannungen sowie Schubspannungen (rechts) (angelehnt an [Her14])

In den Komponenten der Normalspannungen τ_{ij} mit $j = i$ ist der Druckanteil enthalten der in negativer Richtung wirkt (2.5).

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - p \quad i = j \quad (2.5)$$

Wird (2.5) in die Impulsbilanz eingesetzt ergibt sich (2.6).

$$\left(\underbrace{\frac{\partial \rho \cdot v_i}{\partial t}}_{\text{Lokal}} + \underbrace{\frac{\partial \rho \cdot v_i \cdot v_j}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} \right) = \underbrace{k_{v,i}}_{\text{Volumenkräfte}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{Produktion}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{\text{Diffusion}} \quad (2.6)$$

Durch die Annahmen der Reibungsfreiheit, die Vernachlässigung der Volumenkräfte und dem Umstand, dass die Strömung stationär ist werden der Lokalterm, der Term der Volumenkräfte und der Diffusionsterm zu null. Übrig bleibt die geltende Impuls-gleichung oder dieser spezielle Fall auch Euler Gleichung genannt (2.7). [Her14]

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho \cdot v_j \cdot v_i)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.7)$$

2.1.3.3. Energieerhaltung

Auch zur Veranschaulichung und Herleitung der Energieerhaltung wird wieder auf die Darstellung der Energieströme in und aus einem Flächenelement zurückgegriffen. Die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie $d\dot{E}$ in diesem Flächenelement setzt sich zusammen aus den Energieströmen, die ein- bzw. ausfließen, der Wärmeleitung $d\dot{Q}$, der Arbeit pro Zeit der angreifenden Spannungen $d\dot{A}$, der Energiezufuhr von außen \dot{q}_s und der Arbeit pro Zeit durch das Wirken der Volumenkräfte $k_i \cdot v_j$.

Im Flächenelement ist die vorhandene Energie eine Summe aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1^2 + v_2^2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$ und der inneren Energie $\rho \cdot e \cdot dx_1 \cdot dx_2$ zusammen. Die zeitliche Änderung ergibt (2.8).

$$\frac{\partial[\rho \cdot (e + \frac{\bar{v}^2}{2})]}{\partial t} \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{FE} \quad (2.8)$$

Analog zur Navier–Stokes Gleichung werden für alle Energiekomponenten die ein- und ausfließenden Ströme betrachtet (Abb. 2.4).

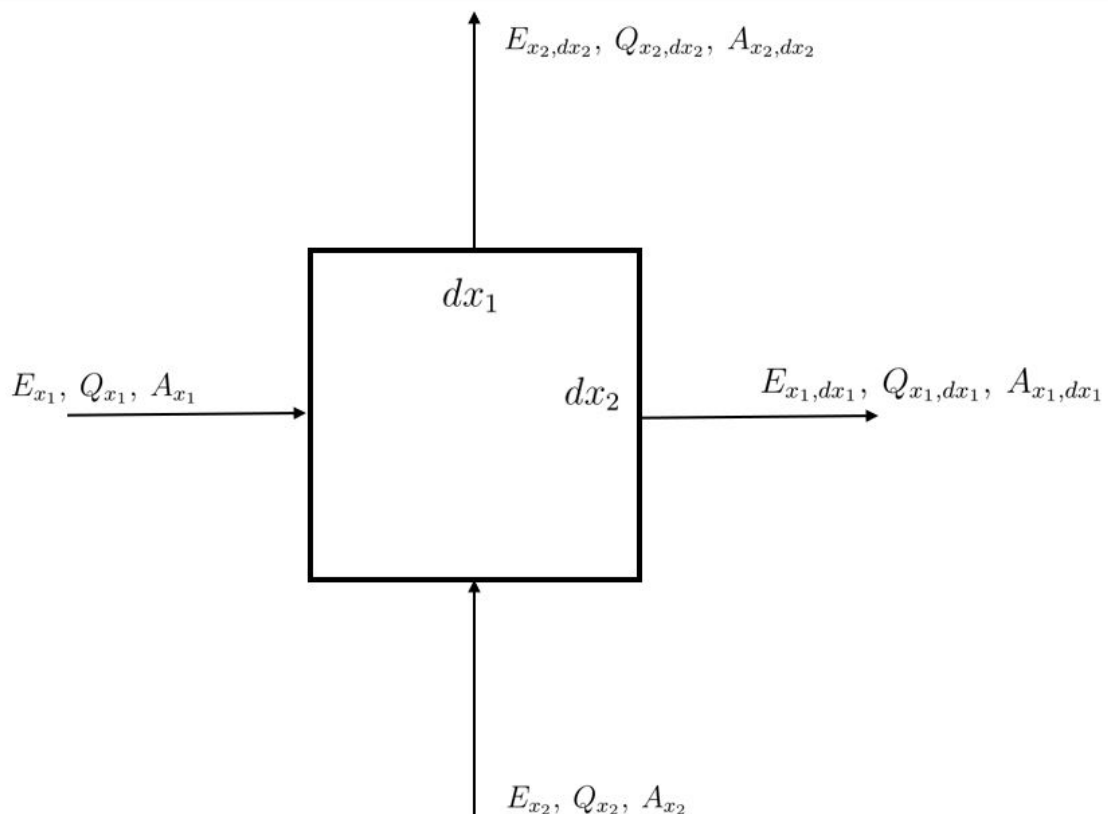


Abbildung 2.4.: Energiebilanz an einem Flächenelement (angelehnt an [Her14])

Bei Addition der verschiedenen Energiekomponenten, die auftreten können, ergibt sich (2.9). Diese drei Gleichungen und die Materialgleichungen, die im Folgenden beschrieben werden, bilden die Physik ab, welches das kompressible strömungspe-

zifische System beschreiben.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(e \cdot v_j)}{\partial x_j} \right)}_{\text{innere Energie}} + \underbrace{\rho \cdot \left(\frac{\partial \frac{V^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{V^2}{2} \cdot v_j)}{\partial x_j} \right)}_{\text{kinetische Energie}} = \\
 & \underbrace{\frac{\partial(\rho \cdot v_j)}{\partial x_j}}_{\text{Druckspannungsarbeit}} + \underbrace{\frac{\partial(v_j \cdot \tau_{ij})}{\partial x_j}}_{\text{Scherspannungsarbeit}} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda_w \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \right)}_{\text{Wärmeleitung}} + \quad (2.9) \\
 & \underbrace{\rho \cdot \dot{q}_s}_{\text{zugeführte Energie}} + \underbrace{\mu \cdot \Phi_{diss}}_{\text{Dissipation}}
 \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass keine Energie zugeführt wird, keine Wärmeleitung stattfindet und sich auch kein Teil der Energie durch Reibung in Wärme umwandelt, vereinfacht sich die Gleichung. Es bleiben die Terme der inneren Energie, der kinetischen Energie und die Druckspannungsarbeit bestehen, alle anderen Terme werden zu null. Zusätzlich wird die Annahme getroffen, dass es sich um ein ideales Gas handelt, welches das Profil umströmt. Bei idealen Gasen sind die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v konstant, daher gilt (2.10).

$$\begin{aligned}
 e &= c_v \cdot T \quad \text{und} \quad h = e + \frac{p}{\rho} = c_{p,w} \cdot T \\
 e &= c_{p,w} \cdot T - \frac{p}{\rho}
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich dann nach kurzer Umrechnung die Energiegleichung, die für das System der stationären, zweidimensionalen Profilmströmung Gültigkeit besitzt (2.11). [Her14]

$$\rho \cdot v_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_p \cdot T + \frac{1}{2} \cdot v_{ges}^2 \right) = 0 \quad (2.11)$$

2.2. Thermodynamische Grundlagen

Ziel ist es in dieser Arbeit Aussagen über die Druckverteilungen eines umströmten Profils zu treffen. Daher ist es notwendig die thermodynamischen Eigenschaften eines Fluides zu betrachten. In diesem Abschnitt werden die thermodynamischen Effekte, die innerhalb einer solchen Strömung ablaufen beleuchtet.

2.2.1. Zustandsgleichung

Den thermodynamischen Zustand eines Gases, also das Zusammenspiel zwischen Druck, Dichte und Temperatur, beschreibt die allgemeine Zustandsgleichung für ideale Gase (2.12). In idealen Gasen werden keine Wechselwirkungen zwischen den Teilchen betrachtet. Dies bedeutet, dass der Abstand der Teilchen oder Moleküle im Gas so groß ist, dass keine Anziehungskräfte wirken und auch kein Zusammenstoßen stattfindet. Ideales Gas hat demnach eine relativ geringe Dichte.

$$p = \rho \cdot R_s \cdot T \quad (2.12)$$

Dabei ist R_s die spezifische Gaskonstante, die sich aus der universellen Gaskonstante $R = k_B \cdot N_A$ und der molaren Masse M zusammensetzt. Durch die spezifische Gaskonstante, wird die Modellierung der Strömung stoffabhängig. Bei der Profilstromung wird davon ausgegangen, dass die Forderungen des idealen Gases erfüllt sind, wobei die Zustände deshalb mit der idealen Gasgleichung berechnet werden können. [Gan87]

2.2.2. Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik thematisiert die Energieerhaltung. Energie kann weder erzeugt noch zerstört, sondern nur umgewandelt werden. Für ein geschlossenes System bedeutet dies, dass die innere Energie de des Fluids entweder als Wärme dq oder in einer Arbeitsform dw nach außen abgeben wird. Mit diesem Zusammenhang ergibt sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik (2.13).

$$de = dq + dw \quad (2.13)$$

Die Größe der inneren Energie de hängt nicht von der Art oder dem Weg der Änderung ab, deshalb wird es als totales Differential beschrieben. Während die Änderung der Wärme oder der Arbeit auch davon abhängen, welche Art von Umwandlung stattfindet. Das heißt, sie sind nicht nur über den Anfangs- und Endwert definiert. In Abbildung (2.5) ist diese wegababhängige Änderung beschrieben. Dort sind zwei Isothermen abgebildet. Die nötige Wärmemenge dq die notwendig ist um von der einen zur anderen Isothermen zu kommen kann nun beliebig erfolgen, allerdings ist der Endzustand abhängig von dem Weg. Hier als Beispiel eingezeichnet isochor und isobar.

Die Arbeit, die zur Änderung der inneren Energie eingesetzt oder entnommen wird, kann dabei zu einem reversiblen oder auch irreversiblen Prozess führen. Reversibel

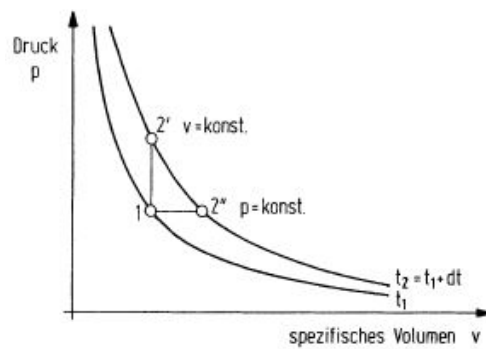


Abbildung 2.5.: Zustandsänderung auf eine andere Temperatur [Gan87]

bedeutet, dass der vorherige Zustand durch Prozessumkehr wieder erreicht werden kann.

Wird während des Prozesses weder Wärme zu- noch abgeführt ist der Prozess adiabatisch, falls dieser dann auch noch reversibel ist spricht man von einem isentropen Prozess, bei dem die Entropie konstant bleibt. Bei Irreversibilität wird während der Umwandlung Entropie erzeugt, die als polytrope Zustandsänderung bezeichnet wird. In einem offenen System wird neben Arbeit und Wärme auch Masse über die Systemgrenzen hinweggegeben. In diesem Fall wird die Durchströmung als stationär angenommen und unter diesen Umständen die technische Arbeit definiert, die für offene, sprich durchströmte Systeme, gilt (2.14).

$$dw_{tech} = v dp \quad (2.14)$$

Die Zustandsgröße der Enthalpie wird eingeführt und ergibt sich aus der Summe der inneren Energie und der technischen Arbeit (2.15).

$$dh = de + v dp \quad (2.15)$$

Aus der Enthalpie und der inneren Energie lassen sich unter der Annahme, dass ein ideales Gas vorliegt, spezifische Wärmekapazitäten ausdrücken. Die spezifische Wärmekapazität ist die notwendige Wärmemenge, um die Temperatur einer Masseneinheit um ein Kelvin zu erhöhen. Dabei kann auf unterschiedlichen Wegen die Temperatur erhöht werden. Die zwei existierenden spezifischen Wärmekapazitäten sind $c_{p,w}$ und c_v , die Indizes stehen für die Zustandsgröße, die konstant gehalten wird. Für das hier bearbeitete Strömungsproblem werden die spezifischen Wärmekapazitäten als konstant angenommen, da sie bei idealen Gasen nur noch temperaturabhängig

sind und die Temperaturunterschiede relativ gering bleiben. Daher gilt (2.16). [Gan87]

$$\begin{aligned}\Delta h &= c_{p,w} \cdot \Delta T \\ \Delta e &= c_v \cdot \Delta T\end{aligned}\tag{2.16}$$

2.2.3. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik werden Aussagen über die Richtung getroffen, in der die thermodynamischen Prozesse ablaufen oder ablaufen können. Hierzu wird eine Zustandsgröße eingeführt. Die Entropie s . Die Entropie ist ein Maß der Verluste, die innerhalb einer Zustandsänderung auftreten. Bei reversiblen Prozessen gilt daher $\Delta s = 0$. Unter Anwendung eines integrierenden Faktors werden aus den Funktionen der Arbeit und Wärme ein totales Differential. Indem die Arbeit auf den Druck und die Wärmemenge auf die Temperatur bezogen wird. Nach diesem Vorgang können die Gleichungen (2.17) gebildet werden.

$$\begin{aligned}ds &= \frac{dq}{T} \\ dv &= \frac{dw}{-p}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Bei einem verlustbehafteten, irreversiblen, Prozess wird Wärme in Form von Reibung erzeugt. Um ein Vergleich zwischen irreversibel und reversibel zu erreichen, wird ein reversibler Vergleichsprozess zugrunde gelegt. Falls bei einer Zustandsänderung Wärme von außen zugeführt wird, muss beim reversiblen Vorgang immer mehr Wärme zugeführt werden, um auf den gleichen Endzustand zu kommen. Dies liegt daran, dass beim irreversiblen Prozess durch die Reibung zusätzliche Wärme entsteht (2.18).

$$ds = dq_{rev} > dq_{irrev}\tag{2.18}$$

Bei adiabatischen Prozessen hingegen gilt aufgrund fehlender Wärmezufuhr von außen (2.19). Das Gleichheitszeichen gilt für reversible Prozesse.

$$ds \geq 0\tag{2.19}$$

Mit dem ersten Hauptsatz ergibt sich die Gleichung für die Entropie (2.20).

$$ds = \frac{dh}{T} + \frac{1}{\rho \cdot T} dp\tag{2.20}$$

Ersetzt man nun dh mit (2.16) und ρ mit der allgemeinen Gasgleichung (2.12) und betrachtet die Änderung der Entropie an einem Stromfaden, ergibt sich (2.21) im zweidimensionalen Fall $j = 1, 2$. [Gan87]

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{R_s}{p} \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (2.21)$$

2.2.4. Definition der Totalgrößen

Die Totalgrößen, Ruhegrößen oder auch Gesamtgrößen sind die Zustandsgrößen, die sich ergeben, wenn die Strömung isentrop auf $v = 0$ abgebremst werden würde. Diese werden mit dem Index 0 versehen. Die hier genannten Ruhegrößen spielen bei der Berechnung von reibungsfreien adiabatischen Strömungen eine große Rolle, da die Gesamttemperatur oder auch Gesamtenthalpie konstant ist und sich nur aus der Geschwindigkeit und dem statischen Anteil der Enthalpie oder Temperatur in jedem Punkt der Strömung zusammensetzt (2.22).

$$h_0 = h + \frac{1}{2} \cdot v^2 \quad (2.22)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich dann durch die Energiegleichung (2.11), dass im kompletten Strömungsfeld die Energie gleich sein muss (2.23).

$$E_{ges} = c_p \cdot T_0 \quad (2.23)$$

2.3. Aerodynamische Grundlagen

Die eigentliche Berechnung, die in dieser Arbeit durchgeführt wird, beruht auf der Grundlage von Potentialströmungen. Potentialströmungen sind drehungs- und reibungsfrei. Aufgrund dieser Annahme wurde durch die Potentialtheorie ein Berechnungsverfahren entwickelt, welches sich Panelverfahren nennt. Da die Potentialtheorie die Grundlagen des verwendeten Impulspotentials bildet, wird diese und das Berechnungsverfahren im folgenden Kapitel erläutert.

2.3.1. Das Geschwindigkeitspotential

Für eine drehungsfreie Strömung gilt (2.24).

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = 0 \quad (2.24)$$

Die Potentialtheorie besagt, dass ein Geschwindigkeitspotential Φ existiert, deren Ableitung in die Raumrichtungen die jeweilige Geschwindigkeit (2.25) ergibt. Φ ist dabei eine skalare Funktion, die eben von den Richtungen im gewählten Koordinatensystem abhängig ist $\Phi = \Phi(x_j)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = v_j \quad (2.25)$$

Aufgrund der Massenerhaltung für inkompressible Medien muss die zweite Ableitung des Geschwindigkeitspotentials null ergeben. Die Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials oder später des Impulspotentials ist die eigentliche Schwierigkeit bei dem behandelten Strömungsproblem. Die Funktion des Potentials ist abhängig von dem umströmten Profil und kann nur mit passenden Randbedingungen bestimmt werden. Senkrecht zu den Potentiallinien verlaufen die sogenannten Stromlinien. Die Stromfunktion ψ gibt an, in welche Richtung das Fluid strömt (2.26). Stromlinien sind die Bahnen, auf denen sich die Fluidteilchen bewegen. [And84]

$$v_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \quad (2.26)$$

2.3.2. Elementarströmungen

Beliebige Potentialströmungen lassen sich durch Überlagerungen (Superpositionierung) verschiedener Elementarströmungen bilden. Die einfachste davon ist die gleichförmige Strömung, wobei gilt: $\Phi = v_\infty \cdot x_1$ und auch $\Psi = v_\infty \cdot x_2$ (Abb. 2.6).

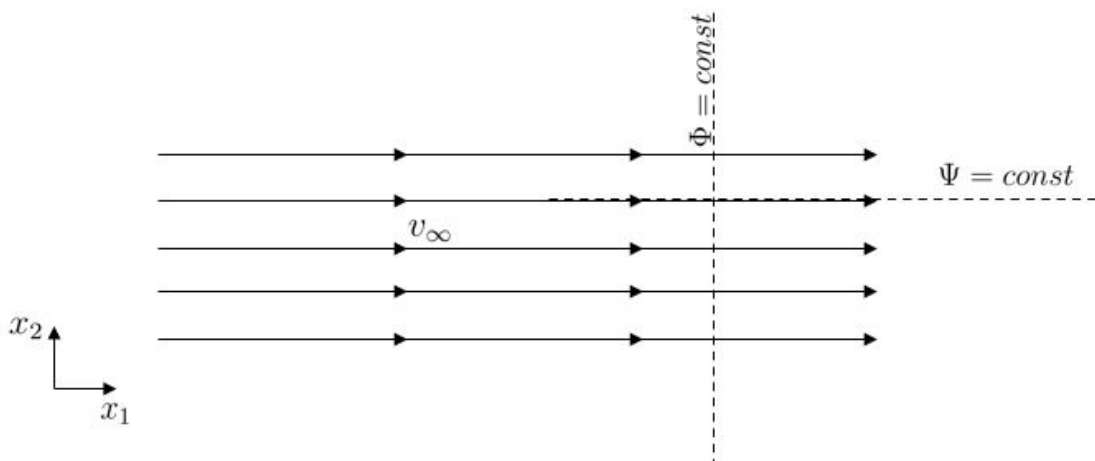


Abbildung 2.6.: Gleichförmige Strömung (angelehnt an [And84])

Die zweite Elementarströmung, die zur Modellierung der Profilmströmung benötigt wird, ist die Quellen- bzw. Senkenströmung. Aufgrund der Eigenschaften dieser Ele-

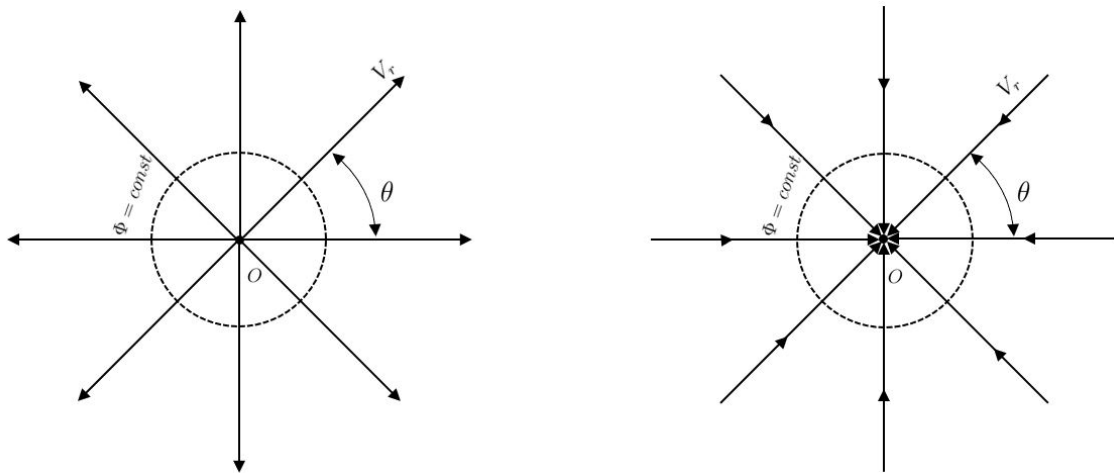


Abbildung 2.7.: Quellenströmung (links) und Senkenströmung (rechts) (angelehnt an [And84])

mentarströmungen werden hier Polarkoordinaten verwendet. Hier wird von einem punktförmigen, diskreten Potential O aus die Strömung radial in alle Richtungen abgeleitet. Bei Senken ist die Richtung der Strömung zum Entstehungspunkt und bei Quellen in die entgegengesetzte Richtung. Der Ursprung O ist dabei ein singulärer Punkt, diesem bezüglich besitzt die Potentialgleichung keine reelle Lösung. Die Linien konstantem Potential verlaufen kreisförmig um den Ursprungspunkt (Abb. 2.7). Die Geschwindigkeit senkrecht zu v_r ist dabei null.

Die radiale Geschwindigkeitskomponente v_r ist dabei abhängig vom Radius r also der Entfernung zur Quelle und einer Konstante c , die abhängig ist vom Volumenstrom, der von der Quelle/Senke aus- bzw. eingeht (2.27).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r = \frac{c}{r} \quad (2.27)$$

Die Abhängigkeit zum Volumenstrom wird durch einführen der Quellstärke Λ ausgedrückt. Wird der Volumenstrom pro Länge l , was gleichzeitig der Quellstärke entspricht, in Polarkoordinaten berechnet, ergibt sich nach Integration über den Umfang (2.28).

$$\frac{\dot{V}}{l} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v_r = \Lambda \quad (2.28)$$

Aus diesem Ausdruck wird die radiale Geschwindigkeit durch umstellen der Gleichung gewonnen. Durch Integration über r und θ können die Integrationskonstanten eliminiert und das Potential einer Quell- bzw. Senkenströmung ausgedrückt werden (2.29). Analog dazu wird die Stromfunktion gebildet (2.30).[And84]

$$\Phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \ln r \quad (2.29)$$

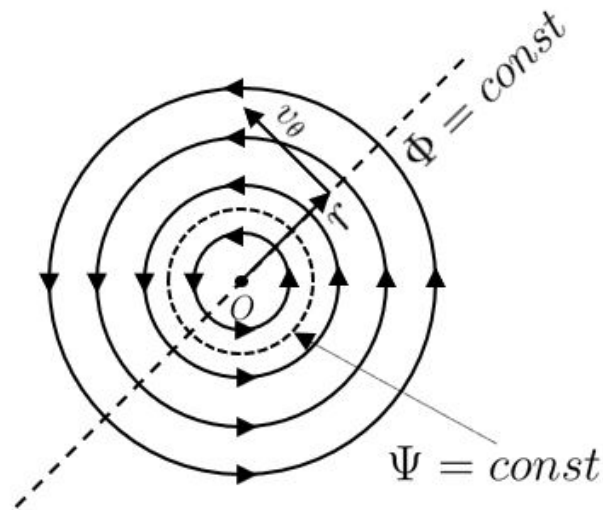


Abbildung 2.8.: Zirkulationsströmung (angelehnt an [And84])

$$\Psi = \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \theta \quad (2.30)$$

Die dritte Elementarströmung wird Zirkulationsströmung genannt. Diese ist auch eine Lösung der Potentialgleichung. Dabei ergibt sich eine kreisförmige Strömung konzentrisch um den Quellpunkt O (Abb. 2.8).

Analog zur Quell- und Senkenströmung ist die Geschwindigkeit die Ableitung des Potentials, allerdings ist in diesem Fall $v_r = 0$ und $v_\theta \neq 0$ (2.31).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = v_\theta = \frac{c}{r} \quad (2.31)$$

Um in diesem Fall die Konstante c zu ermitteln, wird das Ringintegral über eine Stromlinie mit dem Abstand r vom Mittelpunkt gebildet. Dies ergibt dann das Potential Γ (2.32).

$$\Gamma = - \oint v \, ds = -v_\theta \cdot 2\pi \cdot r \quad (2.32)$$

Aus (2.31) und (2.32) ergibt sich (2.33).

$$c = -\frac{\Gamma}{2\pi} \quad (2.33)$$

Das Minus resultiert aus der gewählten Vorzeichenkonvention. Gegen den Uhrzeigersinn ist die Strömung negativ und mit dem Uhrzeigersinn wird die Strömung dann positiv. [And84]

2.3.3. Superposition

Die Laplace Gleichung $\nabla\Phi = 0$ ist eine lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Durch die Linearität ergibt sich, dass die Summe von partikulären Lösungen die sogenannte Laplace Gleichung ebenfalls lösen. Dies bedeutet, dass die Summe verschiedener Elementarströmungen die Gleichung ebenfalls erfüllen. Werden nun die ersten beiden Elementarströmungen superpositioniert ergibt sich für die Stromfunktion (2.34).

$$\Psi = v_{\infty} \cdot r \cdot \sin(\theta) + \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \theta \quad (2.34)$$

Die daraus resultierenden Stromlinien werden in Abbildung (2.9) aufgezeigt. An der Stelle B entsteht dabei ein Staupunkt, hier hat die Geschwindigkeit den Betrag von null. D bildet den Quellursprung ab. [And84]

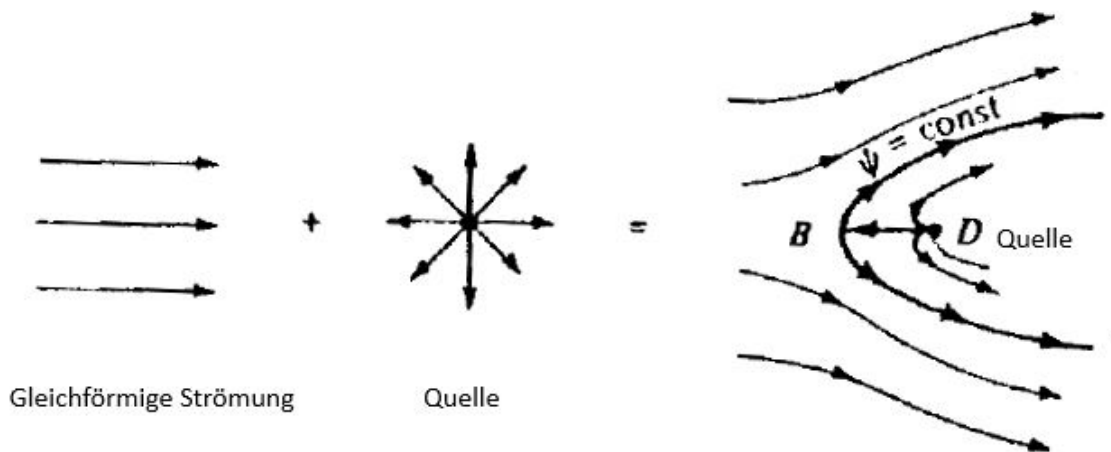


Abbildung 2.9.: Überlagerung einer gleichförmigen Strömung und einer Quelle (angelehnt an [And84])

2.3.4. Panelverfahren

Durch Überlagerung oder Superposition können beliebige umströmte Körper gebildet werden. Bei Geometrien wie Profilen wird dies analytisch umständlich und zu komplex. Daher werden numerische Verfahren verwendet. Beim Panelverfahren werden die Quellen und Senken der verschiedenen Elementarströmungen so berechnet, dass die Außenkontur der gegebenen Geometrie eine Stromlinie wird. Die Umrandung des Körpers wird dabei in sogenannte Panels aufgeteilt (Abb. 2.10). Auf diesen Panels werden Quellen bzw. Senken konstanter Stärke verteilt, im Kontrollpunkt wird die Quellstärke, die über ein Panel aufsummiert wird, gespeichert. Generell gilt, wie

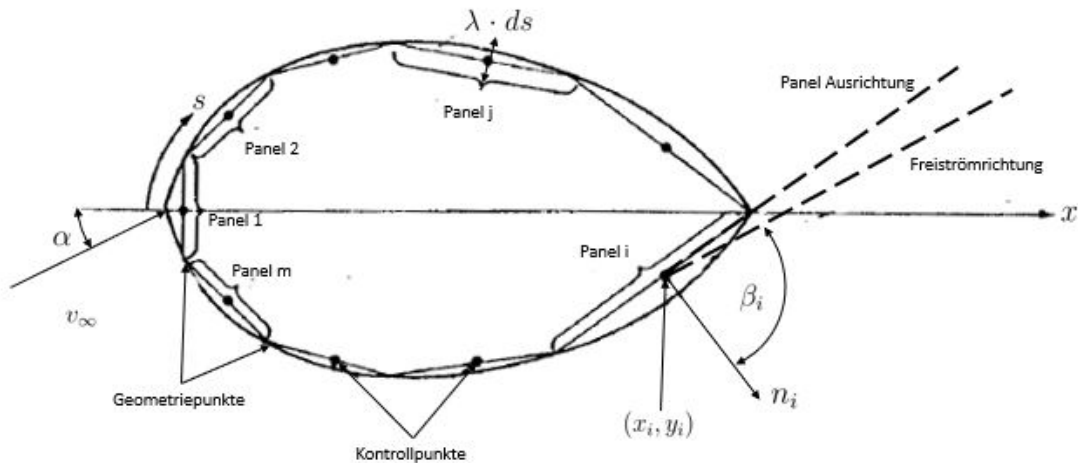


Abbildung 2.10.: Paneleinteilung eines Körpers (angelehnt an [And84])

auch bei konventionellen CFD Berechnungen mit Vernetzung, eine Verdichtung der Panels an kritischen Strömungspunkten verbessert das Ergebnis. Diese Punkte sind bei der Profilmströmung speziell die Vorderkante, bei der der Geschwindigkeitsgradient relativ hoch wird, und Hinterkante, bei der die Abströmbedingungen definiert werden müssen.

Um die Quellstärken zu bestimmen, wird ein lineares Gleichungssystem gebildet, indem an jedem Kontrollpunkt alle Einflüsse der Quellen in den übrigen Kontrollpunkten aufsummiert werden. Die Randbedingungen zum Lösen dieses Systems werden durch die Abströmung der Hinterkante, sowie die vorher erwähnte Tatsache, dass die gewünschte Geometrie Außenkontur zur Stromlinie wird, bestimmt. Daher muss in jedem Kontrollpunkt die Normalengeschwindigkeit im Bezug des jeweiligen Panels verschwinden $v_{n,i} = 0$.

Die Quellstärken variieren von Panel zu Panel. Im zweidimensionalen Raum ist deren Einheit der Volumenstrom pro Länge. Das Potential an einem beliebigen Kontrollpunkt auf der Geometrie ergibt sich dann durch Lösen des Integrals (2.35). Dabei werden die Quellstärken durch 2π geteilt und mit $\ln r$ multipliziert. Die Grenzen des Integrals a und b bilden den Anfang und das Ende des Profils ab.

$$\Phi = \int_b^a \frac{\lambda \cdot ds}{2\pi} \cdot \ln r \quad (2.35)$$

Numerisch wird dieses Problem wie folgt gelöst. Die Quellen oder Senken sind über die einzelnen Panel konstant und werden, wie bereits beschrieben im Kontrollpunkt berechnet. Teilt man die Kontur in n Panels auf, wird aus dem Integral der Gleichung

(2.35) eine Aufsummierung aller Potentiale der Außenkontur (2.36).

$$\Phi(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^n \Delta\Phi = \sum_{j=0}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{ij} \cdot ds_j \quad (2.36)$$

Der nächste Schritt ist die Bildung der Gleichung der Normalengeschwindigkeit in jedem Kontrollpunkt, um die Quellstärken bestimmen zu können. Zunächst wird der Anteil der Anströmgeschwindigkeit zur Normalenrichtung eines jeden Panels bestimmt (2.37).

$$v_{\infty, n} = \vec{v}_{\infty} \bullet \vec{n}_i = v_{\infty} \cdot \cos(\beta_i) \quad (2.37)$$

Die Normalengeschwindigkeit der Panels (x_i, y_i) wird durch die Ableitung der Gleichung (2.36) entlang des Normalenvektors gebildet. Für den Fall $i = j$ wird der Radius zu null, daher ergibt sich ein singulärer Punkt. Der Einfluss des Panels auf sich selbst wird mit $\frac{\lambda}{2}$ angegeben [And84]. Die Geschwindigkeiten Normal zu jedem Panel im Hinblick auf die Induktion der anderen Panels bildet sich über die Gleichungen (2.36) und dem eben beschriebenen Spezialfall bei $i = j$ (2.38).

$$v_n = \frac{\lambda_i}{2\pi} + \underbrace{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) \cdot ds_j}_{j \neq i} \quad (2.38)$$

Der Integralausdruck $\int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) \cdot ds_j$ bildet die sogenannte Einflussmatrix I_{ij} . In dieser sind alle geometrischen Abhängigkeiten zwischen den Panels abgebildet. Um nun letztendlich die Stärken der Quellen und Senken in jedem Panel berechnen zu können, müssen sich die Normalengeschwindigkeiten der Panels und die Normalengeschwindigkeit der Anströmung aufheben (2.39).

$$v_{\infty, n} + v_n = 0 \quad (2.39)$$

Aus (2.37), (2.38) und (2.39) folgt das lineare Gleichungssystem (2.40).

$$\frac{\lambda_i}{2\pi} + \underbrace{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \cdot I_{ij}}_{j \neq i} + v_{\infty} \cdot \cos(\beta_i) = 0 \quad (2.40)$$

Das beschriebene Verfahren lässt sich für Körperumströmungen anwenden, die keinen Auftrieb generieren. Zur mathematischen Beschreibung von Auftrieb generierenden Strömungen wird eine Zirkulationsströmung um das Profil benötigt und zusätzlich eine weitere Randbedingung. Die Kutta Bedingung. Das Verfahren ist analog zum Pa-

nelverfahren ohne Auftrieb, nur werden anstatt Quellen und Senken Zirkulationsquellen benutzt. Durch den Austausch der Quellen ändert sich (2.36) zu (2.41).

$$\Phi(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^n \Delta\Phi = - \sum_{j=0}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \theta_{ij} \cdot ds_j \quad (2.41)$$

Auch hier sind im Integral ausschließlich geometrische Parameter vorhanden (2.42).

$$\theta_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) \quad (2.42)$$

Weiter muss wieder die Normalengeschwindigkeit in jedem Panel verschwinden, weshalb das zu lösende Gleichungssystem wie (2.40) aufgebaut wird und sich zu (2.43) ändert.

$$v_\infty \cdot \cos(\beta_i) - \sum_{j=0}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \cdot J_{ij} = 0 \quad (2.43)$$

Wie schon erwähnt, muss bei Profilumströmungen mit Auftrieb, die Kutta Bedingung erfüllt sein. Diese beschreibt das Abströmverhalten an der Hinterkante (oft auch TE für Trailing Edge) (Abb. 2.11). Dabei muss die Strömung das Profil an der Hinterkante anliegend verlassen. Aus diesem Grund muss die Geschwindigkeit direkt an der Hinterkante null sein, dies ist gleichbedeutend mit der Wirbelstärke gleich null an diesem Punkt $\gamma(TE) = 0$. Erreicht wird dieser Ausgleich, wenn die Geschwindigkeiten im Panel i gleich der negativen Geschwindigkeit im Panel $i - 1$ wird. Da im numerischen Verfahren das Gleichungssystem für die Quellstärken gelöst wird, wird die Randbedingung implementiert als (2.44).

$$\gamma_i = \gamma_{i-1} \quad (2.44)$$

Umso näher und frequenter die Kontrollpunkte am hinteren Punkt des Profils sind, umso genauer wird die Kutta Bedingung erfüllt.

Die Einführung der Kutta Bedingung lässt das Gleichungssystem zu einem überbestimmten System werden. Eine Möglichkeit wäre dann einen Kontrollpunkt zu vernachlässigen. Numerische Ergebnisse können allerdings schwanken je nach Wahl des vernachlässigten Punktes. [And84]

In diesem Fall werden, anstatt ein Berechnungspunkt zu löschen, zusätzliche Zirkulationsquellen auf der Skelettlinie verteilt und aufsummiert. Diese ergeben schließlich die letzte Spalte des Gleichungssystems.

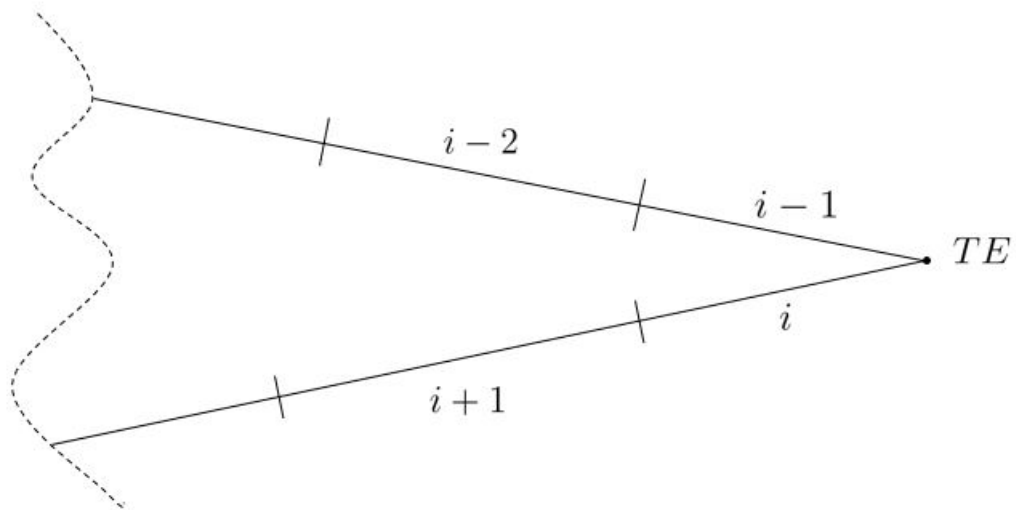


Abbildung 2.11.: Vergrößerung der Hinterkante (angelehnt an [And84])

3. Impulspotential

Die Potentialtheorie, speziell mit dem beschriebenen Panelverfahren ist relativ schnell und effizient, hinsichtlich Rechenressourcen und Preprocessing, bei Berechnungen von Profilumströmungen. Allerdings nur bei inkompressiblen Verhalten des Fluids. Das Impulspotential bietet dahingehend eine Erweiterung der existierenden Methoden, indem es auch kompressible Effekte berücksichtigt. Anstatt des Geschwindigkeitsfeldes v_i wird nun mit den gleichen Methoden das Feld des Impulses $(\rho v)_i$ berechnet.

3.1. Definition und Bilanzierung

Das Impulspotential ω wird analog zum Geschwindigkeitspotential definiert. Die Ableitung dieses Potentials in die Raumrichtungen ergibt das Produkt der Dichte und dem Geschwindigkeitsvektor (3.1).

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = (\rho v)_j \quad (3.1)$$

Die zweite Ableitung des Impulspotentials muss null ergeben, da die Massenbilanz für kompressible Medien (2.3) dies vorgibt (3.2).

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2} = \frac{\partial (\rho v)_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

Die Herausforderung bei diesem Verfahren ist es, die Theorie des Impulspotentials mit den bestehenden Bilanzgleichungen in Einklang zu bringen. Bei Betrachtung der Energiegleichung (2.11) wird diese nur erfüllt, wenn der zweite Faktor null ergibt. Dies ist nur dann gegeben, wenn $c_p \cdot T + \frac{1}{2} \cdot v_{ges}^2 = konst.$ ist. Die Impulsbilanz wird allerdings nur erfüllt, wenn innerhalb der Strömung Rotation zugelassen wird $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \neq 0$. Das liegt daran, dass zwar die Rotation des Impulses null ist $\nabla \times (\rho \vec{v}) = 0$, da allerdings die Dichte nicht konstant ist $\frac{\partial \rho_i}{\partial x_i} \neq 0$, gilt für die Rotation im Geschwindigkeitsfeld $\nabla \times \vec{v} \neq 0$. Dies lässt sich durch kurze Rechnung verdeutlichen (3.3).

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

Aus (3.3) folgt dann nach kurzer Umformung der Ausdruck (3.4). Wird diese Gleichung noch einmal umgeschrieben und $rot \vec{v}$ isoliert, ergibt sich (3.5) wobei ersichtlich wird,

dass die Rotation nicht null ergeben kann.

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} = \text{rot}(\rho \vec{v}) \quad (3.4)$$

$$\text{rot}(\rho \vec{v}) = \rho \cdot \text{rot} \vec{v} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \rho}_{\neq 0} \Rightarrow \text{rot} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \nabla \rho \quad (3.5)$$

3.2. Berechnung der Feldgrößen

Bei Berechnung des Impulsfeldes liegt die Schwierigkeit darin, die letztendlich benötigten Feldgrößen zu bestimmen, da ρ und v nicht mehr einzeln vorliegen. Aus diesem Grund wird der reduzierte Massenstrom zur Berechnung der Feldgrößen benutzt (3.6).

$$\dot{m}_{red} = \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{T_0}}{A \cdot p_0} = \frac{\rho \cdot v \cdot \sqrt{T_0}}{p_0} \quad (3.6)$$

Mit der allgemeinen Gasgleichung (2.12) und der Definition der Schallgeschwindigkeit (3.7) in Kombination mit der Machzahl, lässt sich der reduzierte Massendurchsatz auch in Abhängigkeit des Gesamtdruckverhältnis $\frac{p}{p_0}$ ausdrücken (3.8).

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R_s \cdot T} \quad (3.7)$$

$$\dot{m}_{red} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{1}{R_s} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \quad (3.8)$$

Für (3.8) existiert allerdings keine analytische Umkehrung zur Bestimmung von $\frac{p}{p_0}$, weshalb auf eine Näherungsgleichung zurückgegriffen wird (3.9).

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_{M \leq 1} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red max}}\right)^2} + 1 - \left(\frac{\dot{m}_{red}}{\dot{m}_{red max}}\right)^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\kappa}}\right) \right] \right\}^{\frac{\kappa}{2}} \quad (3.9)$$

Der maximal zulässige reduzierte Massenstrom $\dot{m}_{red max}$ ist der reduzierte Massen-

strom eines Stoffes, der bei $M = 1$ erreicht wird (3.10).

$$\dot{m}_{redmax} = \left(\frac{1 + \kappa}{2} \right)^{\frac{\kappa+1}{2 \cdot (1-\kappa)}} \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{R_s}} \quad (3.10)$$

Mit den Isentropenbeziehungen zwischen den Feldgrößen, können die restlichen Feldgrößen in den diskreten Punkten berechnet werden.

3.3. Isentrope Betrachtung

Wird die Profilmströmung nun als isentroper (adiabat reversibler) Vorgang betrachtet, bleiben der Totaldruck p_0 und die Totaltemperatur T_0 in allen Punkten der Strömung konstant. Die Feldgrößen lassen sich ohne Probleme aus dem Produkt ρv , welches zum Beispiel aus einem Panelverfahren gewonnen wird, berechnen.

Bei Profilmströmungen wird zur Analyse häufig der Druckbeiwert c_p benutzt (3.11).

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot v_\infty^2} \quad (3.11)$$

p ist der statische lokale Druck am Profil. Dieser kann mit den im vorigen Abschnitt angewandten Gleichungen an jedem Kontrollpunkt des Profils berechnet werden. Bei der Betrachtung eines Punktes nach dem Staupunkt im h - s -Diagramm wird deutlich, welchen Einfluss die Rotation auf die Strömung haben muss. Die aus dem Panelverfahren berechneten Werte für $(\rho v)_i$ sind unabhängig davon, wie die Strömung betrachtet wird, komplett isentrop oder gar polytrop. In Abbildung (3.1) ist nun ein h - s -Diagramm abgebildet. Bleibt die Totaltemperatur über das gesamte Profil gleich, so wird impliziert, dass bei jedem Beschleunigen und Verzögern der Strömung den kinetische Anteil der Energie komplett in Druckenergie umwandelt werden kann. Allerdings wäre dies nur der Fall, wenn die Strömung rotationsfrei wäre. Durch die Entstehung der Rotation im Verzögerungsvorgang kann nicht mehr der gesamte Anteil der kinetischen Energie genutzt werden, da sich nun die kinetische Energie aus einem translatorischen E_{trans} und einem rotatorischen E_{rot} Anteil zusammensetzt. Diese Tatsache schlägt sich bei der Berechnung des Druckbeiwertes nieder. Bei vollständiger Umwandlung der Druckenergie in kinetische Energie führt dies dazu, dass der Geschwindigkeitsanteil zu hoch berechnet wird, da auch der rotatorische Anteil mit einfließen wird. In den diskreten Punkten der Kontur schlägt sich dies in einer Erhöhung des dynamischen Druckes nieder. Diese Annahme führt zu einem geringeren statischen Druck (Erinnerung $p_0 = konst$), was eine Verkleinerung des Druckbeiwertes und eine Vergrößerung des Kompressibilitätseffektes zur Folge hat. Aus diesem

Grund wird bei dieser Betrachtungsweise eine Abweichung des Druckbeiwertes zu den Messwerten in negativer Richtung ausgegangen.

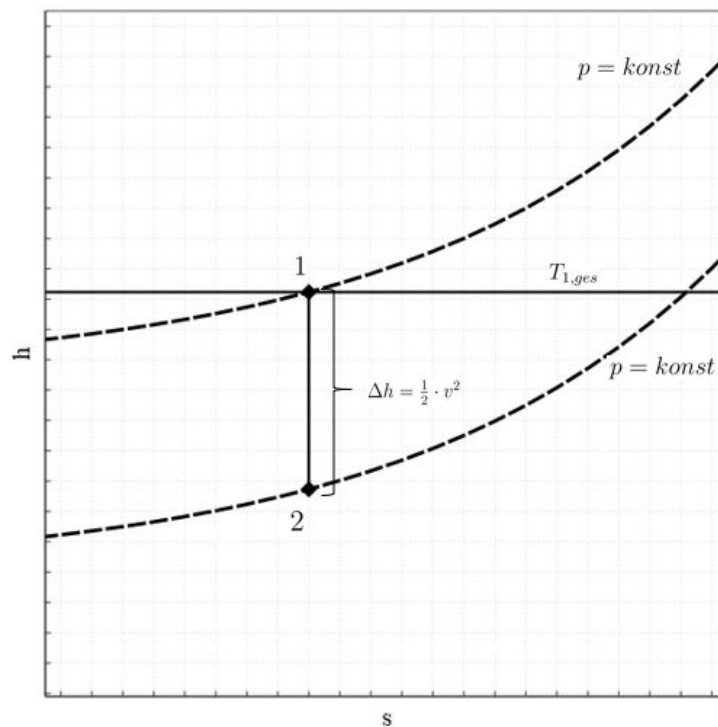


Abbildung 3.1.: Schematischer Verlauf der Enthalpie bei der Beschleunigung nach Staupunkt bei $s = konst$

Nun werden Ansätze entwickelt, die diesen Verlust kinetischer Energie abbilden. Einer dieser Ansätze ist charakterisiert dadurch, dass die Totaltemperatur eben nicht konstant gehalten wird, sondern sich mit Entstehung der Rotation verringert. In Abbildung (3.2) ist so ein Schema aufgezeigt. Die Strömung wird im Staupunkt nicht auf den Punkt 1 verzögert, sondern durch Entstehung der Rotation wird nur auf den Punkt 1' mit verminderter Totaltemperatur verzögert. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit absinkt und demnach der Druckbeiwert steigt. Außerdem muss sich bei Absenken der Geschwindigkeit gleichzeitig die Dichte vergrößern, da der berechnete Impuls (ρv) sich nicht verändert.

Wird die Energiebilanz (2.11) betrachtet, kann diese Gleichung auch zur Berechnung der Feldgrößen genutzt werden. Da der Impuls (ρv) nicht null ist muss der Ausdruck $(c_{p,w} \cdot T_j + \frac{1}{2} \cdot v_{ges,j}^2)$ konstant werden, zumal die Ableitung in die Raumrichtungen null ergeben muss. Daher gilt (3.12).

$$T_j \cdot c_{p,w} + \frac{1}{2} \cdot v_{ges,j}^2 = konst. \quad (3.12)$$

Die Konstante lässt sich relativ leicht ermitteln. In der isentropen Betrachtung bleibt

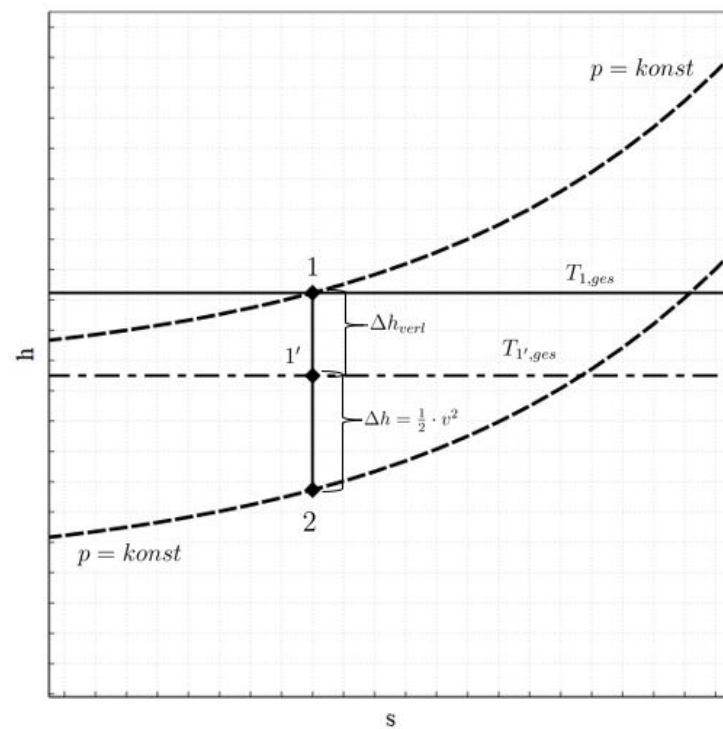


Abbildung 3.2.: Schematischer Verlauf der Enthalpie bei Beschleunigung nach dem Staupunkt mit verminderter Totaltemperatur bei $s = konst$

die Totaltemperatur konstant. Wird die Strömung nun isentrop auf Null abgebremst, muss die die Gesamtenergie $T_{ges} \cdot c_{p,w}$ erreichen. Aus diesem Grund ergibt sich aus (3.12) letztendlich (3.13).

$$T_j \cdot c_{p,w} + \frac{1}{2} \cdot v_{ges,j}^2 = T_{ges} \cdot c_{p,w} \quad (3.13)$$

4. Numerisches Berechnungsmodell

Zur Berechnung der Umströmung werden zwei Programme benutzt. *foil* ist ein Programm der Technisch–Naturwissenschaftlichen Universität Norwegens, welches ein zweidimensionales Panelverfahren anwendet, um unter anderem c_p Verteilungen um beliebige Profile zu berechnen. Die für diese Arbeit relevanten Programmteile werden aus der Programmiersprache *FORTTRAN* in *C++* übersetzt und zur Anwendung des Ansatzes des Impulspotentials modifiziert. Das zweite Programm, welches genutzt wird, ist *XFOIL*. Hier werden die Geometriedaten aufbereitet und zusätzlich noch Vergleichsrechnungen durchgeführt, um Programmierfehler auszuschließen. Im Anhang A.2 sind die wesentlichen Teile des Programmes aufgeführt.

4.1. Numerisches Berechnungsverfahren mit foil

Das Programm arbeitet mit einem zweidimensionalen Panelverfahren, wie in Kapitel 2.3.4 beschrieben wird.

Die Geometriekoordinaten (x_i, y_i) werden von der Hinterkante TE über die Vorderkante LE im Uhrzeigersinn als Textdatei (*.txt*) oder data–file (*.dat*) eingelesen. Die einzelnen Punkte fungieren dabei als Panelbegrenzung. Im nächsten Schritt werden die Kontrollpunkte x_c berechnet, die in der Mitte der Panels liegen. Zusätzlich werden die tangentialen und orthogonalen Winkel im Bezug auf die x–Achse berechnet. Die normalen Winkel zeigen immer vom Panel nach außen weg. Der größte Anteil der Rechenzeit liegt bei der Bildung und Invertierung der Einflussmatrix I_{ij} bzw. J_{ij} . In dieser Einflussmatrix sind die Geometriedaten von Panel j im Bezug auf Panel i aufgelistet. Im numerischen Verfahren müssen eben zwei dieser Matrizen aufgestellt werden, einmal um den Einfluss in tangentialer und einmal den Einfluss in normaler Richtung abzubilden. Die Matrix, die die Wirkung in normalen Richtung darstellt, muss zur Lösung des Gleichungssystems (2.43) invertiert werden. Die Invertierung wird mit dem Gauß–Jordan–Algorithmus realisiert. Die Lösungen dieses Systems entsprechen dann den Quellstärken der Zirkulation. Nun kann die Einflussmatrix in tangentialer Richtung eingesetzt werden, um an jedem Panel das gesuchte $(\rho v)_i$ zu berechnen. Mit den Gleichungen zur Berechnung der Feldgrößen, die in Kapitel (3.2) beschrieben sind, wird dann letztendlich für den komplett isentropen Fall die c_p Verteilung der Ober– und Unterseite berechnet.

Für den Fall der Einführung von einem Enthalpieverlust Δh , muss bei der Bestimmung der c_p Verteilung ein etwas anderer Weg gegangen werden.

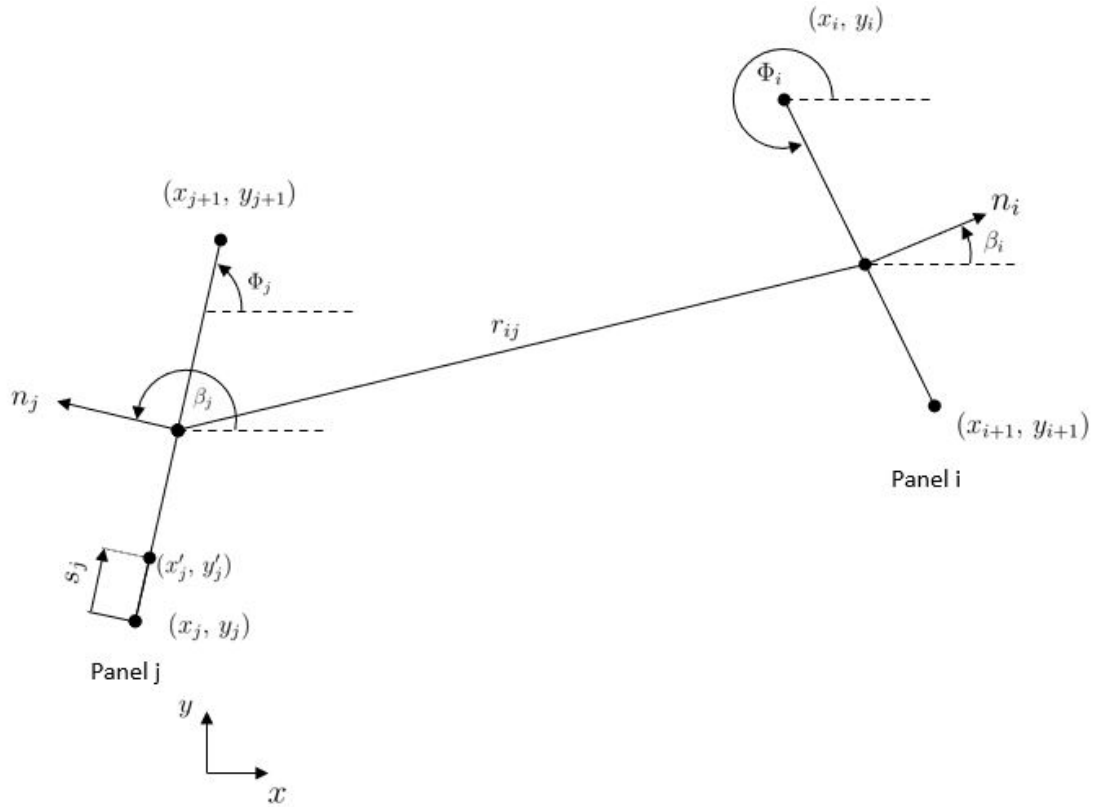


Abbildung 4.1.: Erforderliche Geometrieangaben der Panel zur Bildung von J_{ij} (angelehnt an [And84])

4.1.1. Bildung der Einflussmatrix

Die Einflussmatrix J_{ij} beinhaltet ausschließlich Geometriedaten des Panels j im Verhältnis zu i . Für den Fall, dass $i = j$ wird für die sogenannten Diagonalelemente der Wert π eingetragen, was aus (2.40) hervorgeht. Zur Bestimmung der restlichen Einträge folgt das Programm im Wesentlichen dem Beispiel bei [And84].

In Abbildung (4.1) sind die Parameter der Panels i zu j aufgezeigt, die zur Bildung der Matrix erforderlich sind. Das Integral am Ende von (2.38) bildet J_{ij} als Gleichung ab. Der Abstand oder Radius zwischen den beiden Panels wird über den Satz des Pythagoras gebildet (4.1).

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.1)$$

Des Weiteren muss bei (4.2) der Ausdruck hinter dem Integral umgeschrieben werden, dazu wird die Ableitung in normalen Richtung gebildet (4.3).

$$J_{ij} = \int_J \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \cdot \ln r_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} \cdot \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} = \frac{(x_i - x_j) \cdot \cos \beta_i + (y_i - y_j) \cdot \sin \beta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.3)$$

Der Winkel Φ beschreibt den Winkel zwischen der X-Achse und dem Panel. Immer gegen den Uhrzeigersinn gemessen. β bildet den normalen Winkel eines Panels ab und lässt sich demnach immer ausdrücken mit $\beta = \Phi + \frac{\pi}{2}$. Aus der Geometrie in Abbildung (4.1) geht (4.4) hervor, wobei die Größen g' für die Teillängen der einzelnen Panels stehen.

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j + s'_j \cdot \cos \Phi_j \\ y'_j &= y_j + s'_j \cdot \sin \Phi_j \end{aligned} \quad (4.4)$$

Werden (4.3) und (4.4) in (4.2) eingesetzt erhält man unter Beachtung einiger Platzhalter (4.5).

$$J_{ij} = \int_0^{s'_j} \frac{C \cdot s_j + D}{s_j'^2 + 2 \cdot A \cdot s'_j + B} ds'_j \quad (4.5)$$

Die Platzhalter $A - D$ (4.6) dienen zur Abkürzung des Ausdruckes im Integral. s_j ist die endgültige Panellänge und E ist ein Ausdruck, der nach der Integration zur Vereinfachung des Terms dient.

$$\begin{aligned} A &= -(x'_i - x_j) \cdot \cos \Phi_j - (y'_i - y_j) \cdot \sin \Phi_j \\ B &= (x'_i - x_j)^2 + (y'_i - y_j)^2 \\ C &= \sin (\Phi_i - \Phi_j) \\ D &= (y'_i - y_j) \cdot \cos \Phi_i - (x'_i - x_j) \cdot \sin \Phi_i \\ E &= \sqrt{B - A^2} = (x'_j - x_j) \cdot \sin \Phi_j - (y'_i - y_i) \cdot \cos \Phi_j \\ s_j &= \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_i)^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Das Integral (4.5) ist so umgeformt, dass es mit standardmäßigen Integraltabellen wie in [Ger18] aufgelöst werden kann. Der Term nach der Integration bildet sich, ebenfalls mit den Platzhaltern aus (4.6), in (4.7) ab.

$$I_{ij} = \frac{C}{2} \cdot \ln \left(\frac{s_j'^2 + 2 \cdot A \cdot s_j + B}{B} \right) + \frac{D - A \cdot C}{E} \cdot \left(\tan^{-1} \frac{s_j + A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right) \quad (4.7)$$

Diese Matrix sollte im Normalfall eine dünnbesetzte sein, also die Diagonalelemente werden dominieren. Dies liegt daran, dass sich bei Vergrößerung der Abstände die

Werte der Gleichungen A und E erhöhen. Eine logische Konsequenz, wenn bedacht wird, dass Zirkulationsquellen mit einem größeren Abstand zu einem Punkt eine abnehmende Wirkung auf diesen Punkt haben.

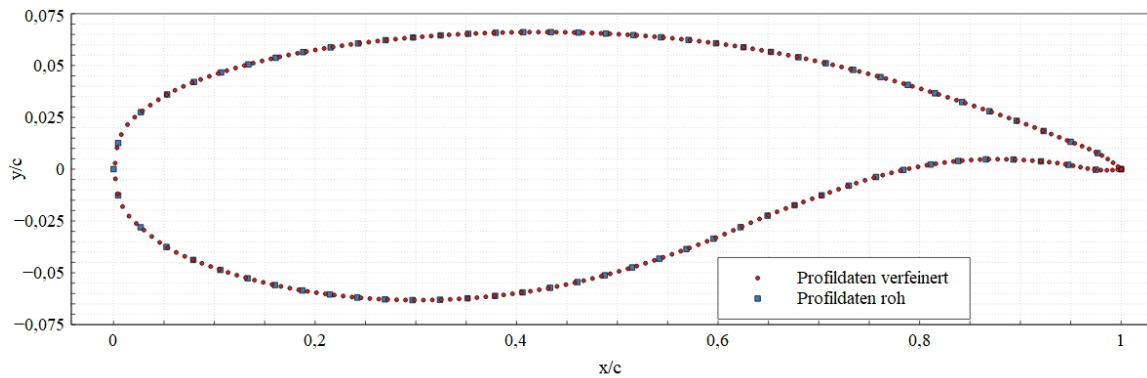
4.2. Numerisches Berechnungsverfahren mit XFOIL

Das Programm *XFOIL* wird hauptsächlich dazu genutzt, eine Vergleichsverteilung des c_p Wertes zu generieren, um zu überprüfen, ob sich etwaige Fehler im Programm befinden. Da *XFOIL* ebenfalls mit einem Panelverfahren arbeitet, eignet sich dieses Open Source Programm hierzu.

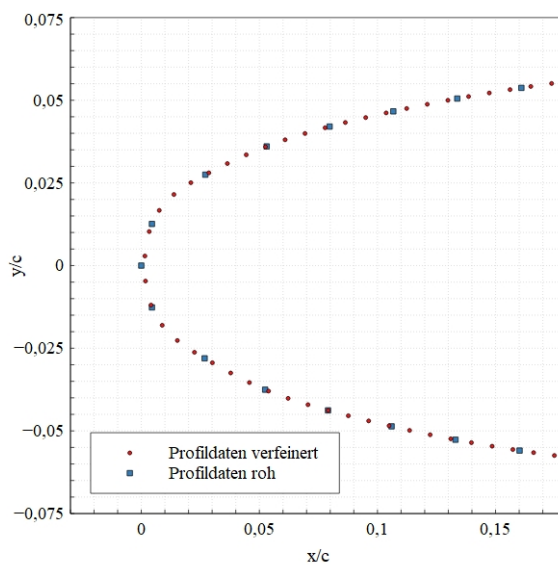
Weiter bietet dieses Programm ein Tool zur Bearbeitung der Profildaten. Im Preprocessing von *XFOIL*, ist es möglich, die Panels zu variieren. Hierzu zählen generell die Anzahl, aber auch Veränderung der Panellänge in gewissen Bereichen. Die vorhandene Profilgeometrie wird an der Vorder- und Hinterkante verfeinert, um die entstehenden Fehler bei der Berechnung so gut wie möglich zu reduzieren (Abb. 4.2).

Die kompressible Berechnung ist ebenfalls möglich. Hier wird ein Verfahren verwendet, welches den inkompressiblen c_p Wert korrigiert. Das Verfahren richtet sich nach Karman–Tsien (4.8). [Mar01]

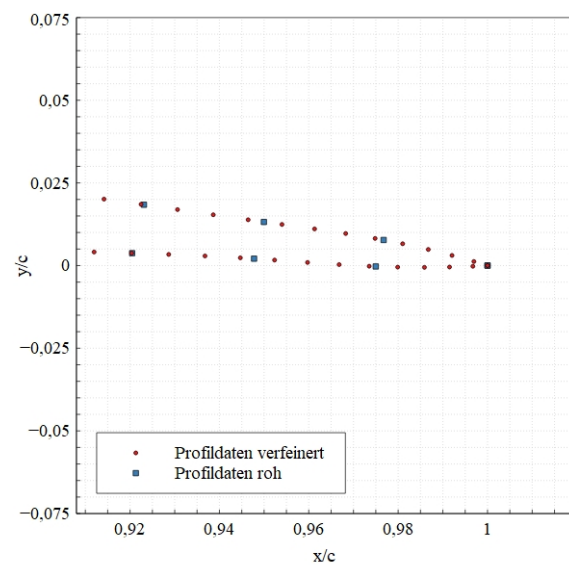
$$c_{p,korr} = \frac{c_p}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2} \cdot \frac{c_p}{2}}} \quad (4.8)$$



(a) Profildatenpunkte des zu berechnenden Profils (superkritisches Profil VA-2 [TK89])



(b) Profilverfeinerung Vorderkante



(c) Profilverfeinerung Hinterkante

Abbildung 4.2.: Profilrohdaten [TK89] und Verfeinerung

5. Vergleich mit Messergebnissen

Die entwickelten mathematischen Modelle müssen anhand von realen Messungen validiert werden. Mit dem Vergleich geht auch gleich eine Bewertung des mathematischen Modells einher. Im ersten Schritt werden die Berechnungen mit dem implementierten Impulspotentialansatz mit den Berechnungen von *XFOIL* verglichen. Dies geschieht noch im inkompressiblen Bereich der Anströmmachzahl. Im nächsten Schritt wird der Ansatz mit kompressiblen Effekten verglichen. Dies gliedert sich in zwei Unterpunkte. Zunächst werden die Messwerte mit den fehlerbehafteten rotationsfreien Berechnungen verglichen. Anschließend die Berechnungen mit zusätzlicher Modellierung der Rotation. Zusätzlich werden noch Berechnungen in *XFOIL* einfließen, die den Kompressibilitätseffekt nach Karman–Tsien berücksichtigen.

5.1. Vergleich inkompressibler Berechnungen

Im ersten Schritt werden die verschiedenen Berechnungsverfahren im inkompressiblen Bereich miteinander verglichen, um eben grundlegende Fehler und Programmierfehler bei der Implementierung des Impulspotentialansatzes auszuschließen. Hierzu wird das identische Profil aus Abbildung (4.2) genutzt und dessen Umströmung mit dem herkömmlichen Geschwindigkeitspotential (*XFOIL*) und dem Impulspotential zu berechnen. Um kompressible Effekte ausschließen zu können, wird eine Machzahl in der Anströmung von $M_\infty = 0,1$ gewählt. Beide Anströmwinkel werden auf $\alpha = 0^\circ$ gesetzt.

Die berechneten negativen c_p Verteilungen sind in Abbildung (5.1) aufgezeigt. Da beide Kurven fast identisch übereinander liegen, kann davon ausgegangen werden, dass der Ansatz des Impulspotentials grundlegend richtig programmiert und die Berechnung der Feldgrößen richtig implementiert werden.

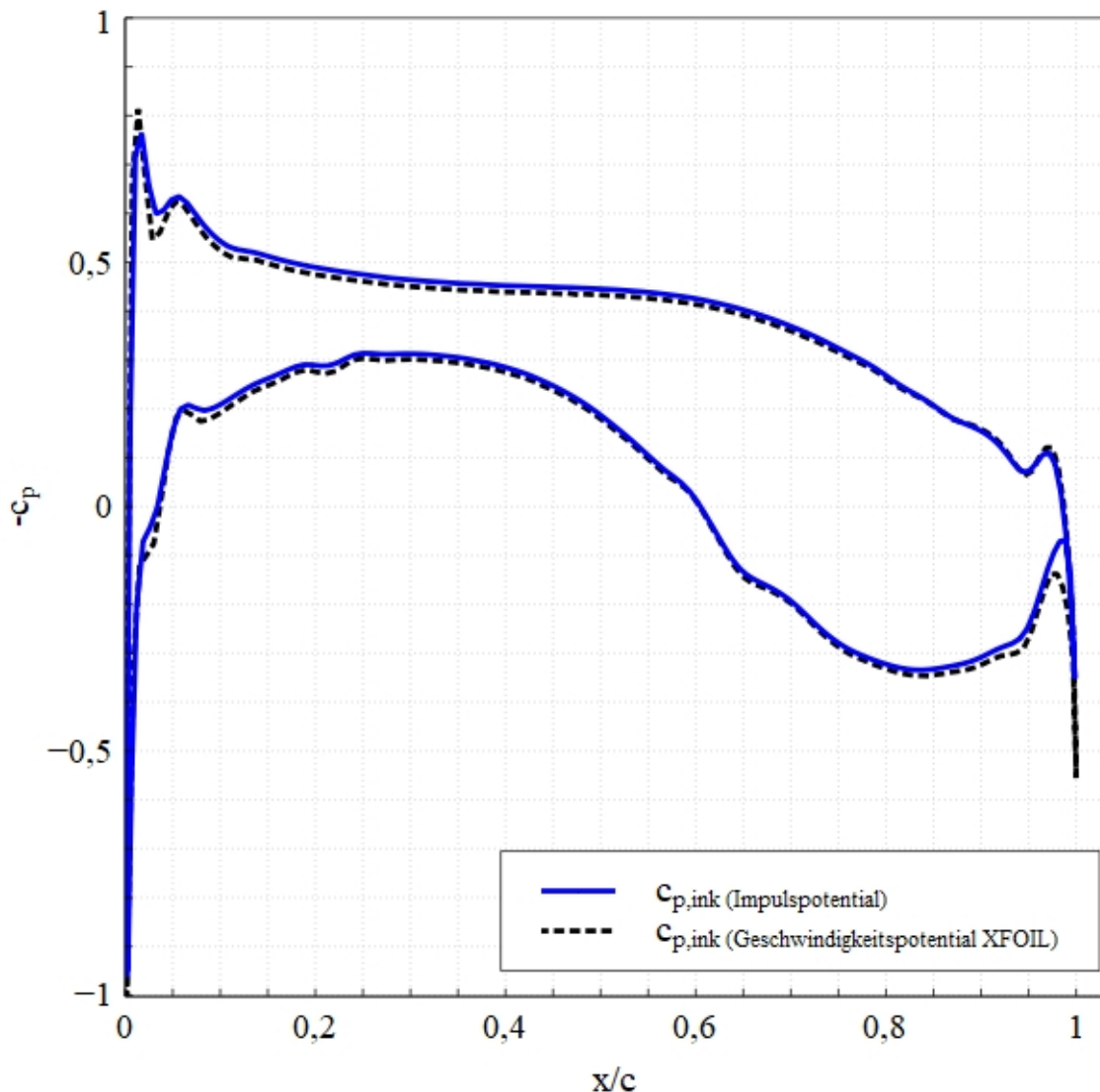


Abbildung 5.1.: Vergleichsrechnung inkompressibler Umströmung

5.2. Vergleich kompressibler Berechnungen ohne Berücksichtigung der Rotation

Die zweite Berechnung erfolgt bei einer höheren Anströmmachzahl $M = 0,5$ und dem Anströmwinkel von $\alpha = -1,14^\circ$. Außerdem sind in der Anströmung noch die Totaltemperatur $T_{\infty,0} = 308,297\text{ K}$ und der Totaldruck $p_{\infty,0} = 80000\text{ Pa}$ gegeben. Diese Bedingungen der Anströmung werden auch in der Messreihe *VicToria_II_11.18_Profil_00530011*, die am transsonischen Windkanal in Göttingen von Costantini et al. [CHK18] (Messaufbau [CK19]) im Rahmen des DLR Projekts *VicToria* [Gör+18] durchgeführt wurden, verwendet. Der Anströmwinkel resultiert aus dem eigentlichen Winkel der Anströmung und einem Offset, der aufgrund des Einbaus hinzuaddiert

werden muss. Es werden die Messungen mit den Berechnungen der beiden Ansätze Impulspotential und Geschwindigkeitspotential verglichen. Die Anströmbedingungen sind dabei so gewählt, dass Kompressibilitätseffekte zum Tragen kommen, aber an keiner Stelle des Profils Überschallströmungen auftreten. Die Kompressibilität in der Berechnung von *XFOIL*, wird wie in Kapitel 4.2 erwähnt, mit einem Korrekturfaktor nach Karman–Tsien berücksichtigt.

Die Betrachtung mit dem Impulspotential in diesem Fall gilt es genauer zu erklären. In einem ersten Vergleich wird die Berechnung komplett isentrop ohne Berücksichtigung der Rotation berechnet. Dies bedeutet, in der Rechnung werden die Totalgrößen als konstant angenommen. Bei Berücksichtigung von Abbildung (3.1) und Kapitel 3.3 wird schnell klar, dass hier ein signifikanter Fehler verbleibt. Durch die Annahme, dass p_0 und T_0 konstant sind, wird suggeriert, dass die komplette kinetische Energie in paralleler Richtung des Panels zur Verfügung steht. Allerdings muss sich die kinetische Energie in translatorischer Richtung verringern, da die Gesamtenergie aufgeteilt werden muss in einen translatorischen Anteil und einen rotatorischen Anteil. In Abbildung (5.2) wird dies deutlich. Hier werden die drei c_p Verläufe aufgetragen. Bei der Betrachtung der Berechnung dieses Druckbeiwertes (3.11) geht der lokale statische Druck p ein. Wird nun angenommen, dass die komplette kinetische Energie zur Verfügung steht, ist demnach die Geschwindigkeit am Panel höher als der Istwert. Mit einer höheren Geschwindigkeit geht bei gleichbleibendem Totaldruck auch ein größerer Anteil an dynamischen Druck einher. Gleichbedeutend hat eine Verringerung des statischen Drucks eine Verkleinerung des Druckbeiwertes zur Folge. In Abbildung (5.2) ist der negative Druckbeiwert aufgetragen, deshalb liegt dieser bei Betrachtung der Berechnung mit dem Impulspotentialansatz erwartungsgemäß über dem Messwert. Bei Betrachtung der lokalen Machzahl (Abb. 5.3), wird noch einmal deutlich, dass die lokalen Geschwindigkeiten speziell an der Oberseite relativ weit über den Messwerten liegen. Zusätzlich werden Berechnungen mit einer zweiten Messreihe durchgeführt. Die Größen in der Anströmung sind dabei identisch, bis auf den Winkel. Der Winkel in der zweiten Messreihe des *VicToria* Projektes *VicToria_II_11.18_Profil_00530017* [CHK18] beträgt $\alpha = -2,14^\circ$. Die Auswertung der zweiten Messreihe ist im Anhang A.1 zu finden.

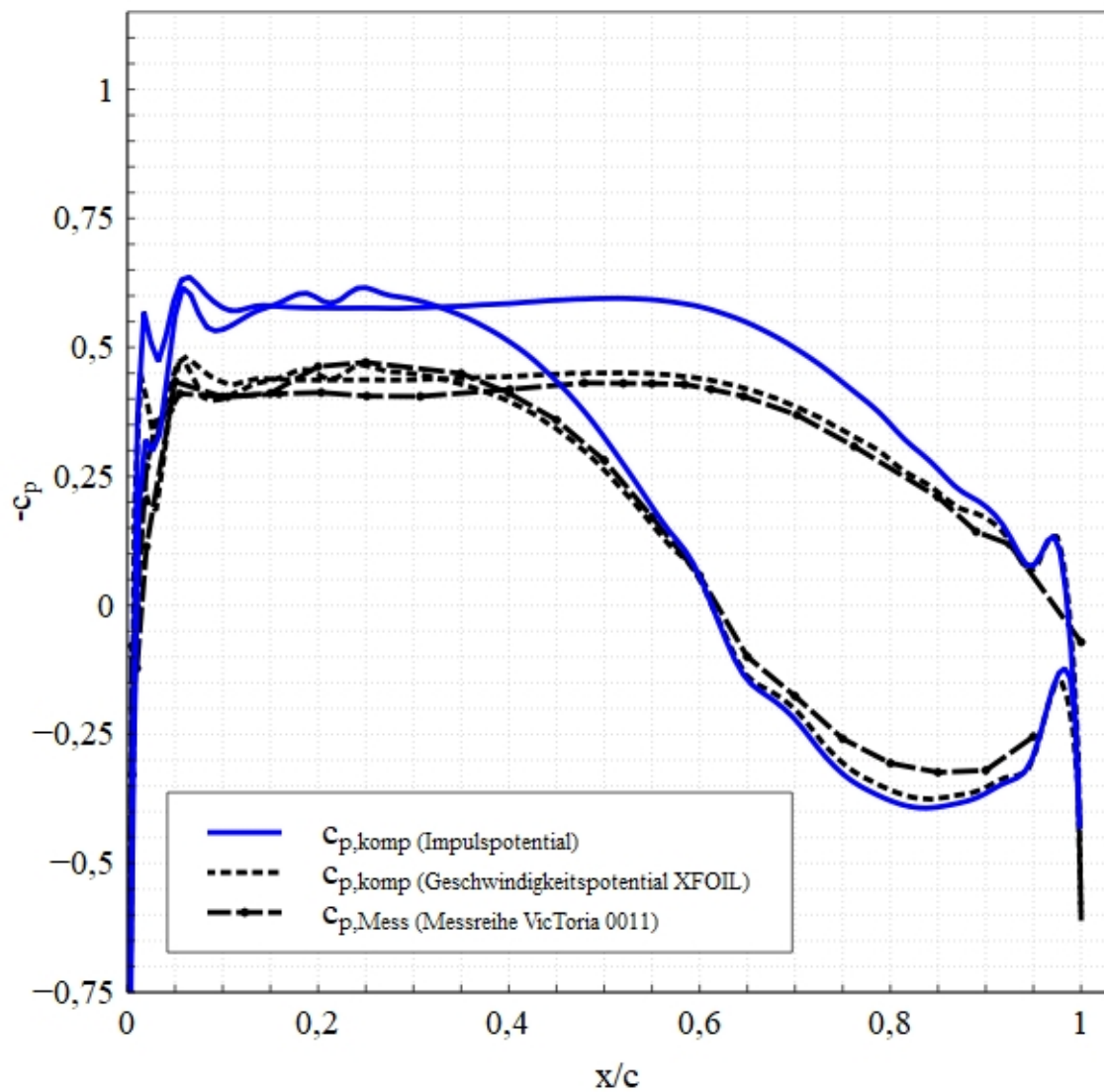


Abbildung 5.2.: Vergleich der Berechnungen des Druckbeiwertes mit den Messwerten aus der Messreihe *VicToria_II_11.18_Profil_00530011* [CHK18]

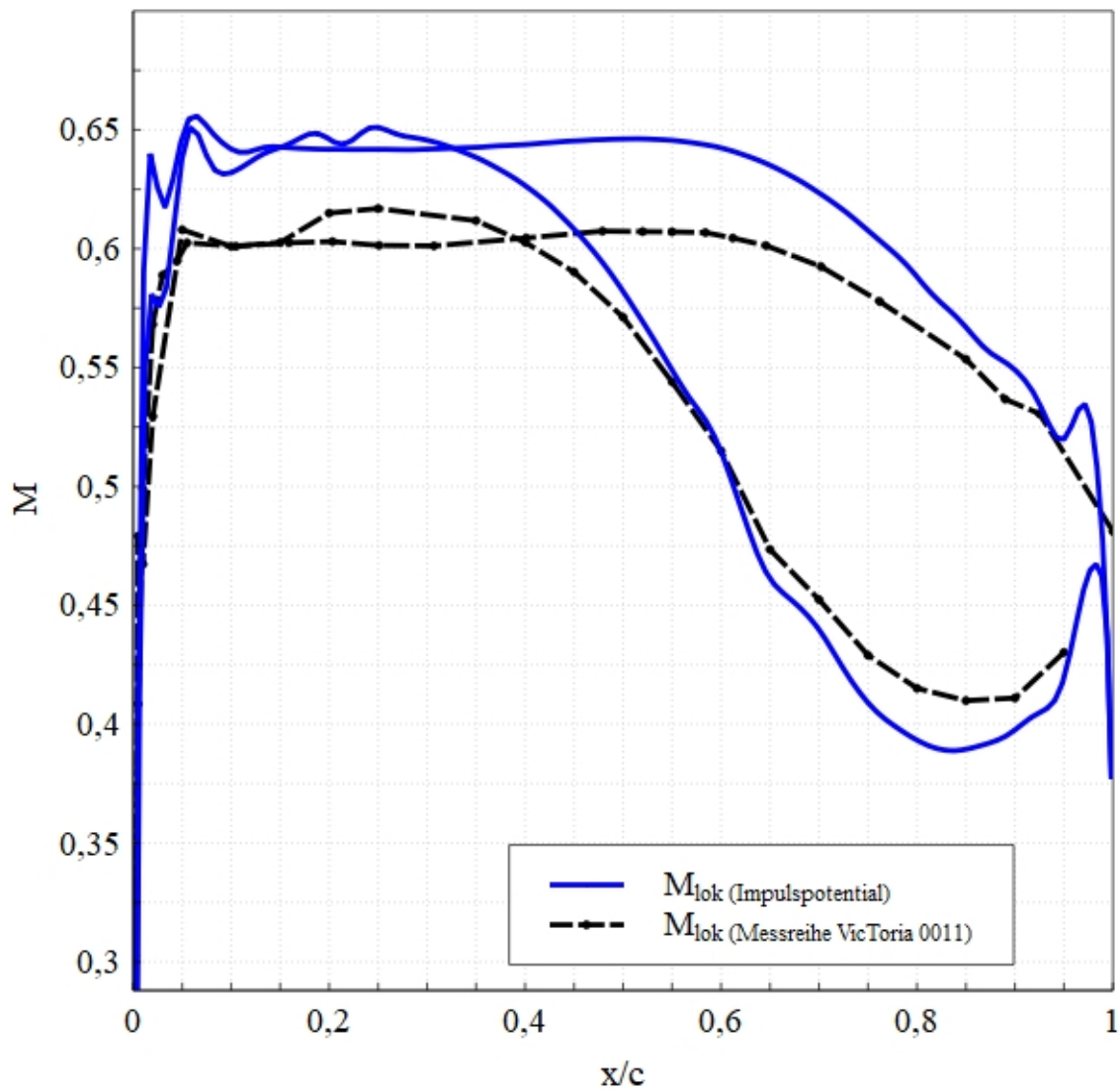


Abbildung 5.3.: Vergleich der lokalen Machzahlen der Berechnung mit dem Impulspotentialansatz und der Messreihe *VicToria_II_11.18_Profil_00530011* [CHK18]

6. Resümee

Eine der Schwierigkeiten dieser Arbeit ist es, den Einfluss der Rotation auf die Profilmströmung und somit auf das mathematische Modell herauszuarbeiten. Mehrere Ansätze sind zu dieser Thematik bearbeitet und teilweise als unbrauchbar verworfen worden. Diese Ansätze sollen hier noch einmal vorgestellt und die Gedankengänge beschrieben werden.

6.1. Entropiezunahme bei Verzögerungsvorgang

Die Idee hinter diesem Ansatz ist, die Rotation nicht direkt zu modellieren, sondern immer dann einen Anstieg der Entropie zu verzeichnen, wenn diese entsteht. Nach ersten Überlegungen entsteht diese genau dann, wenn die Strömung verzögert wird. Der Gradient der Entropie wird dabei berechnet durch (6.1).

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{c_{p,w}}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{R_s}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (6.1)$$

Wird die Impulserhaltung mit $\frac{R_s}{p}$ erweitert, erhält man die Gleichung (6.2).

$$\frac{R_s}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\rho \cdot v_i \cdot R_s}{p} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (6.2)$$

Zusätzlich wird der zweite Faktor der Energiegleichung (2.11) mit $\frac{1}{T}$ erweitert und die implizite Ableitung von $\frac{1}{2} \cdot v^2$ nach x_j gebildet (6.3), dies ergibt dann (6.4).

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} v^2 = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_i \quad (6.3)$$

$$\frac{c_{p,w}}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{T} \cdot v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (6.4)$$

Unter Beachtung der Zustandsgleichung für ideale Gase (2.12) wird (6.2) von (6.4) subtrahiert. Nach kurzer Rechnung ergibt sich eine Gleichung für die Entropie unter Berücksichtigung der Rotation (6.5).

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{1}{T} \cdot v_i \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (6.5)$$

Nun muss die Intensität der Rotation modelliert werden. Die Idee dabei ist ein Vorfak-

tor s_v einzuführen, der dies regeln soll. Dabei soll gelten (6.6)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -s_v \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (6.6)$$

Die komplexe Bestimmung dieses Vorfaktors sollte dann umgangen werden, indem der Abbremsvorgang mit dem Borda–Carnot Stoßverlust modelliert wird.

Bei genauerer Betrachtung der Differentialgleichung, die die Entropie beinhaltet, stößt man auf ein Paradoxon. Der Gradient der Entropie steht senkrecht auf den Stromlinien. Dies wird deutlich, wenn (6.5) für den zweidimensionalen Fall aufgeschrieben wird (6.7). Dies würde bedeuten, dass entlang einer Stromlinie keine Entropie entstehen würde aber zwischen zwei Stromlinien. Da alle Stromlinien aus dem Unendlichen kommen und ebenfalls wieder ins unendliche verlaufen und dort die Entropie konstant sein muss, kann senkrecht zur Stromlinie keine Entropie entstehen. Dies bedeutet, dass die Entropie im ganzen Strömungsfeld konstant sein muss, dies aber nach (6.7) nur der Fall sein kann, wenn die Rotation zu null wird.

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{1}{T} \cdot v_2 \cdot \text{rot } \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial x_2} - \frac{1}{T} \cdot v_1 \cdot \text{rot } \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.2. Modellierung der Rotation mit Starrkörperrotation

Das Problem der Aufteilung der gesamtkinetischen Energie in einen translatorischen und rotatorischen Anteil liegt bei der Modellierung des rotatorischen Anteils der Strömung. Modelliert wird die Strömung in diesem Fall als Starrkörperrotation. Dies bedeutet, es wird angenommen, dass die Strömung wie einen Zylinder über die Kontur abrollt (Abb. 6.1). Zusätzlich wird Isentropie vorausgesetzt, da angenommen wird, dass die entstandenen Wirbel erst weit nach verlassen des Profils dissipieren und somit in Wärme umgewandelt werden.

Die Gesamtenergie aus (2.11) ändert sich dann im letzten Term, indem die kinetische Energie abgebildet wird. Die spezifische kinetische Energie setzt sich dann aus den schon erwähnten translatorischen und rotatorischen Teilen zusammen (6.8).

$$e_{kin} = e_{trans} + e_{rot} = \frac{1}{2} \cdot v_{tr}^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_{rot}^2 \quad (6.8)$$

Bei dieser Überlegung setzt sich ω_{Rot} aus dem Quotient von der translatorischen Geschwindigkeit v_{tr} und dem Radius r zusammen. Das Trägheitsmoment J ergibt sich durch die Annahme, dass sich ein Zylinder über das Profil abrollt mit $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$.

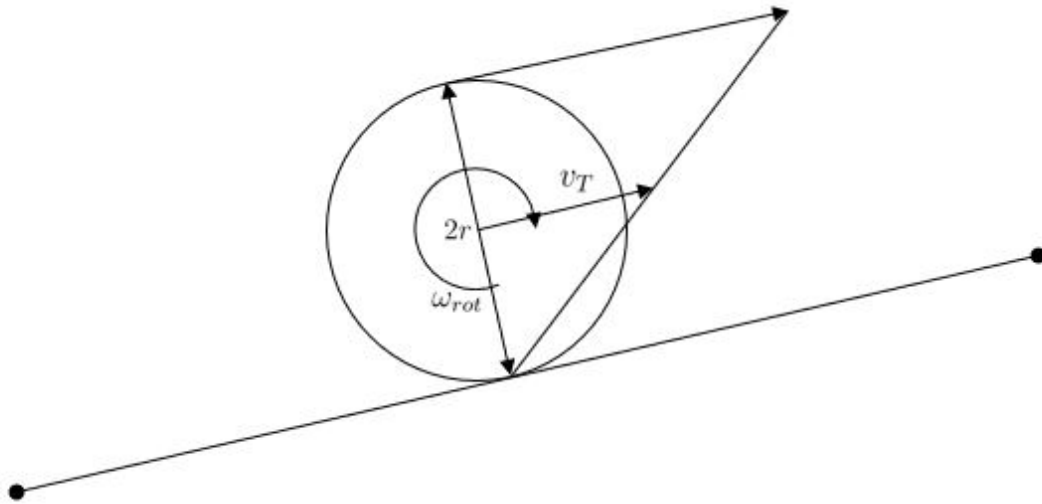


Abbildung 6.1.: Schematische Darstellung der Rotation der Strömung

Eingesetzt in die spezifische Energie ergibt dies (6.9).

$$e_{kin} = \frac{1}{2} \cdot v_{tr}^2 + \frac{1}{4} \cdot v_{tr}^2 \quad (6.9)$$

Die Gesamtenergie ergibt dann für diesen Ansatz (6.10), nach Einsetzen von (6.9) in (3.13).

$$T_j \cdot c_{p,w} + \frac{1}{2} \cdot v_{tr,j}^2 + \frac{1}{4} \cdot v_{tr,j}^2 = T_j \cdot c_{p,w} + \frac{3}{4} \cdot v_{tr,j}^2 = T_0 \cdot c_{p,w} \quad (6.10)$$

Aus (6.10) folgt eine Gleichung für die translatorische Geschwindigkeit (6.11).

$$v_{tr,j} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot (T_0 \cdot c_{p,w} - T_j \cdot c_{p,w})} \quad (6.11)$$

Da ebenfalls Isentropie vorgegeben wird, kann die lokale Dichte ρ_j mit den Isentrophenbeziehungen berechnet werden (6.12).

$$\frac{\rho_j}{\rho_\infty} = \left(\frac{T_j}{T_\infty} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \Rightarrow \rho_j = \rho_\infty \cdot \left(\frac{T_j}{T_\infty} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (6.12)$$

Nun wird das Produkt $\rho \cdot v$ gebildet, welches auch aus dem Panelverfahren bekannt ist (6.13).

$$(\rho v)_j = \rho_\infty \cdot \left(\frac{T_j}{T_\infty} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3} \cdot (T_0 \cdot c_{p,w} - T_j \cdot c_{p,w})} \quad (6.13)$$

In (6.13) befindet sich nur noch die lokale Temperatur T_j als Unbekannte. Jedoch lässt sich diese Gleichung nicht analytisch lösen, weshalb auf eine numerische Berechnung zurückgegriffen wird. Das Newton–Raphson–Verfahren. Dies ist ein einfache

ches Verfahren zur Nullstellenbestimmung. Die Iterationsvorschrift wird in (6.14) aufgezeigt.

$$k_{n+1} = k_n - \frac{f(k_n)}{f(k_n) - f(k_{n-1})} \cdot (k_n - k_{n-1}) \quad (6.14)$$

Das Newton–Raphson–Verfahren kommt dann zum Einsatz, wenn die Zielfunktion nicht mehr analytisch differenziert werden kann. Das allgemeine Newton Verfahren wird hier um eine numerische Rückwärtsdifferentiation erweitert.

Die Zielfunktion ergibt sich dann nach Umstellen von (6.13) zu (6.15).

$$0 = (\rho v)_j - \rho_\infty \cdot \left(\frac{T_j}{T_\infty} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{4}{3}}_Y \cdot (T_0 \cdot c_{p,w} - T_j \cdot c_{p,w})} \quad (6.15)$$

Allerdings existiert für einen erheblichen Teil der Aufpunkte keine Lösung für diese Gleichung. Nach einer Parameterstudie für den Parameter Y wird ein Wert ermittelt, der relativ Nahe an die Messwerte heranreicht (Abb. 6.2). Die Veränderung dieses Faktors könnte damit erklärt werden, dass generelle Reibungsfreiheit angenommen wird. Das Abrollen findet daher mit großem Schlupfeinfluss statt.

Ebenfalls zu den Berechnungen in *XFOIL* wird sich durch diesen Faktor angenähert (Abb. 6.3).

Bei genauerer Betrachtung des Parameters Y werden jedoch Unstimmigkeiten deutlich. Y entsteht direkt aus dem Anteil der Rotationsenergie zur Gesamtenergie. In den Abbildungen (6.2) und (6.3) liegt dieser Parameter bei $Y = 2,125$. Bei Betrachtung von (6.11) müsste die Rotationsenergie mit negativem Vorzeichen in die Gesamtenergie eingehen und somit die translatorische Energie größer als die Gesamtenergie werden lassen, was nicht physikalisch ist.

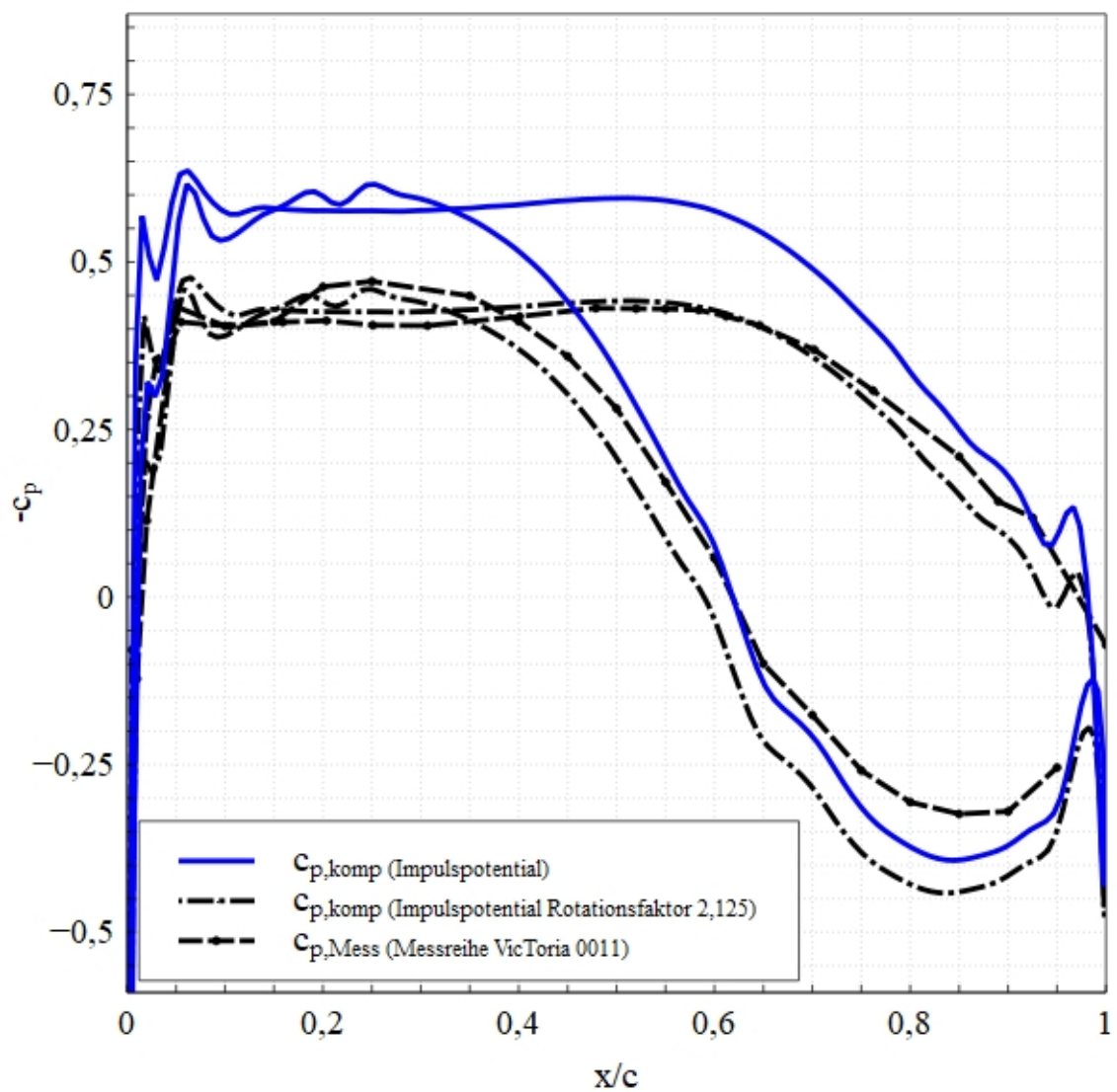


Abbildung 6.2.: Vergleich der c_p -Verläufe zwischen Messergebnissen [CHK18] und Ansätze der Impulspotentialtheorie

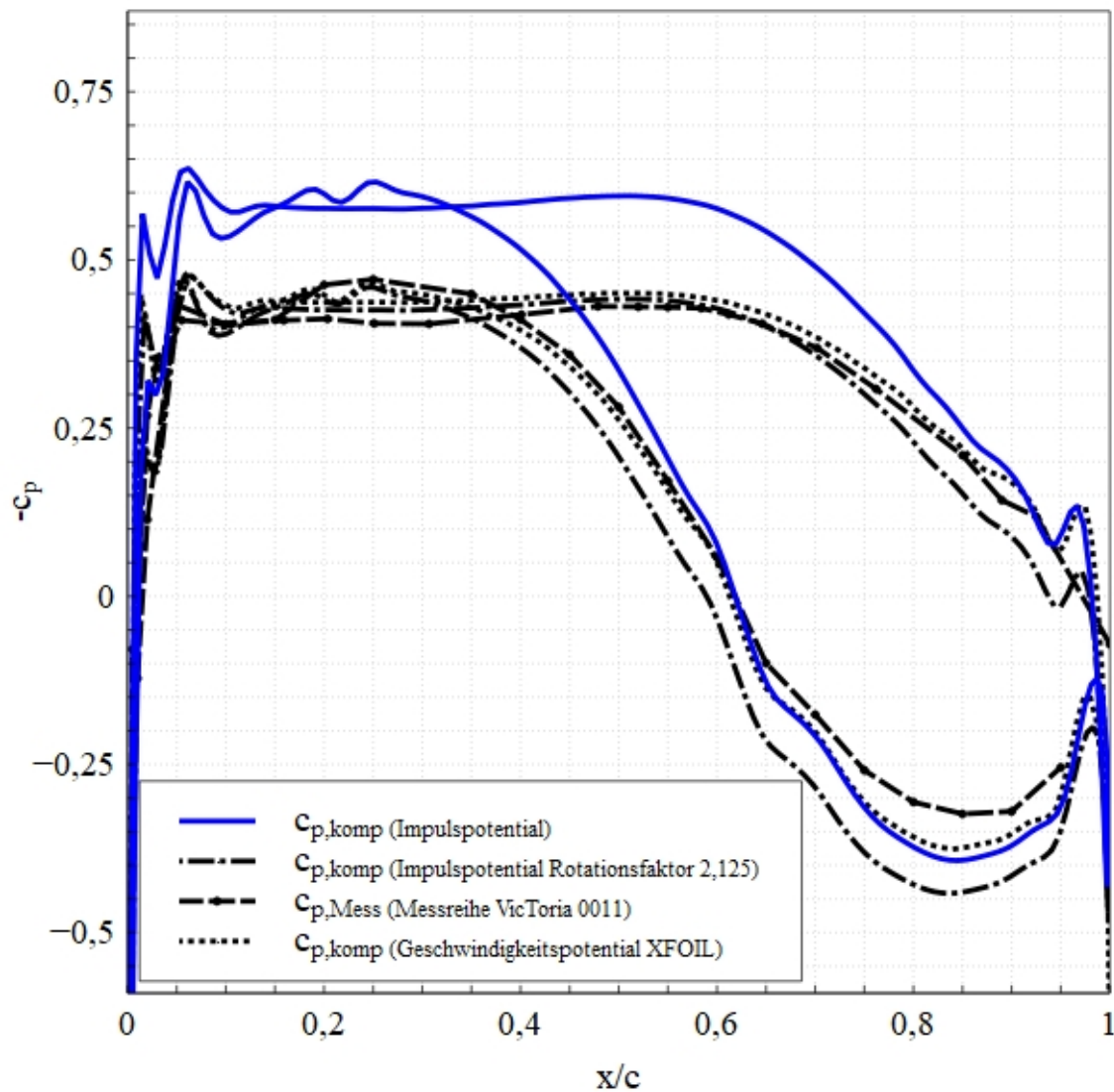


Abbildung 6.3.: Vergleich der c_p -Verläufe zwischen Messergebnissen [CHK18] und Ansätze der Impulspotentialtheorie und den Berechnungen aus der Geschwindigkeitspotentialtheorie

6.3. Wirbelmodellierung nach Hamel und Oseem

Auf Grundlage des Starrkörpers, der auf der Kontur abrollen soll, werden weitere Wirbelmodelle betrachtet. Die Modellierung nach Hamel und Oseem, die auch eine exakte Lösung der Navier–Stokes Gleichungen ist, bildet den Wirbel aus einer Kombination eines Starrkörperwirbel im inneren und einen Potentialwirbel im äußeren Bereich ab. Der Vorteil der Betrachtung nach Hamel und Oseem liegt beim Übergang des Starrkörperwirbels zum Potentialwirbel, die Unstetigkeiten in der Beschreibung nach Rankine werden bei Hamel und Oseem umgangen (Abb. 6.4). Der Radius, der gerade noch die Starrkörperrotation abbildet, berechnet sich durch (6.16). [Hei13]

$$r_1 = 2 \cdot \sqrt{\nu \cdot t} \quad (6.16)$$

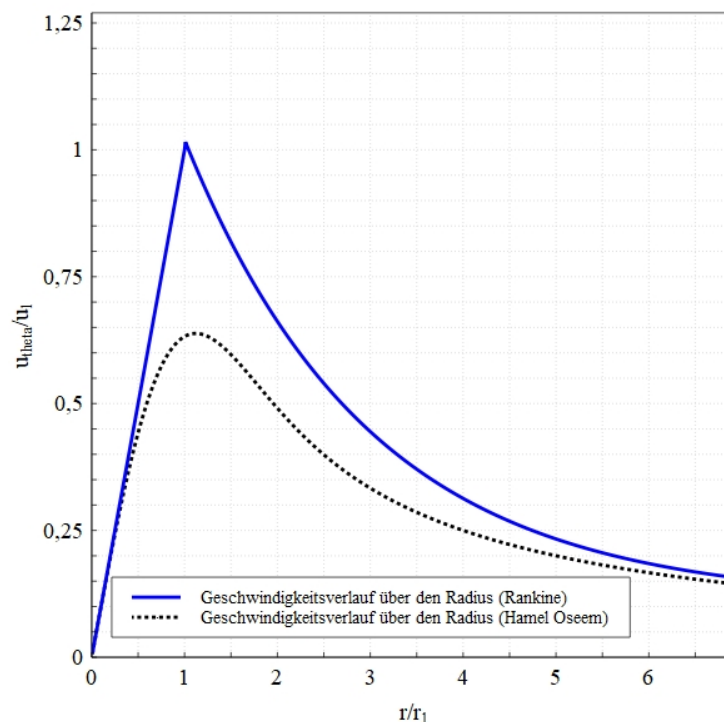


Abbildung 6.4.: Geschwindigkeitsübergang von Starrkörperwirbel zu Potentialwirbel (angelehnt an [Hei13])

Aus dieser Herangehensweise soll nun der fehlende Radius zur Berechnung der Rotationsenergie berechnet werden. Dabei wird angenommen, dass die Strömung nur einen endlichen Zeitraum besitzt einen Wirbel auszubilden. Um den Zeitraum zu bestimmen, wird die Anströmgeschwindigkeit durch die Profillänge dividiert $t = \frac{l}{v_\infty}$. Weiterhin wird angenommen, dass die Dissipation der Wirbel erst weit nach Verlassen des Profils einsetzt und die zeitliche Veränderung der Wirbelstärke über dem Profil

keine Rolle spielt. Nach Bestimmung der Zeit kann der Radius der Starrkörperrotation über (6.16) bestimmt werden. Die Wirbelstärke ω_{rot} oder auch Winkelgeschwindigkeit kann durch die Tatsache, dass gilt $rot(\rho \vec{v}) = 0$ durch den Gradienten der Dichte beschrieben werden (6.17)

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)_i}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \cdot v)_j}{\partial x_i} = 0 = rot(\rho \vec{v}) = \rho \cdot rot(\vec{v}) + v_i \cdot \nabla \rho \quad (6.17)$$

Aus (6.17) folgt nach Umstellen auf die Rotation von \vec{v} , letztendlich die Winkelgeschwindigkeit des Wirbels (6.18).

$$rot(v) = \frac{1}{2} \cdot \omega_{rot} = -\frac{1}{\rho} \cdot v_{tr,j} \cdot \nabla \rho \quad (6.18)$$

Werden (6.16) und (6.18) eingesetzt in (3.13) folgt für die Energiegleichung (6.19).

$$c_{p,w} \cdot T_0 = c_{p,w} \cdot T_j + \frac{1}{2} \cdot v_{tr,j}^2 + \frac{1}{4} \cdot r_1^2 \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \cdot v_{tr,j} \cdot \nabla \rho\right)^2 \quad (6.19)$$

Analog zum Ansatz in Kapitel 6.2 ist es nun möglich, die Energiegleichung (6.19) nach der Geschwindigkeit in translatorischer Richtung auflösen und die Dichte ρ mit den Isentropenbeziehungen als Funktion von der lokalen Temperatur T_j auszudrücken. Der Gradient der Dichte wird mit finiten Differenzen berechnet, wobei beachtet werden muss, dass nur die Dichte im vorigen Punkt bekannt ist. Daher muss der Rückwärtsdifferenzenquotient genutzt werden. Außerdem muss die Dichte im aktuellen Berechnungspunkt dann ebenfalls durch die Isentropenbeziehungen als Funktion von der lokalen Temperatur ausgedrückt werden. Die Gleichung, auf die das Newton–Raphson Verfahren zur Temperaturbestimmung angewandt wird beinhaltet die vorherig erläuterten Bedingungen (6.20).

$$0 = (\rho \cdot v)_j - \sqrt{\frac{c_{p,w} \cdot T_0 - c_{p,w} \cdot T_j}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{\rho_\infty \cdot \left(\frac{T_j}{T_\infty}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}\right)^2} \cdot \left(\frac{\rho_\infty \cdot \left(\frac{T_j}{T_\infty}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} - \rho_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right)^2} \cdot \rho_\infty \cdot \left(\frac{T_j}{T_\infty}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (6.20)$$

Mit der berechneten lokalen Temperatur können dann die Geschwindigkeit in translatorischer Richtung und die Dichte neu bestimmt werden. Der aus diesen Werten neu berechnete Druckbeiwert c_p verschiebt sich dabei etwas näher an die Messwerte, der

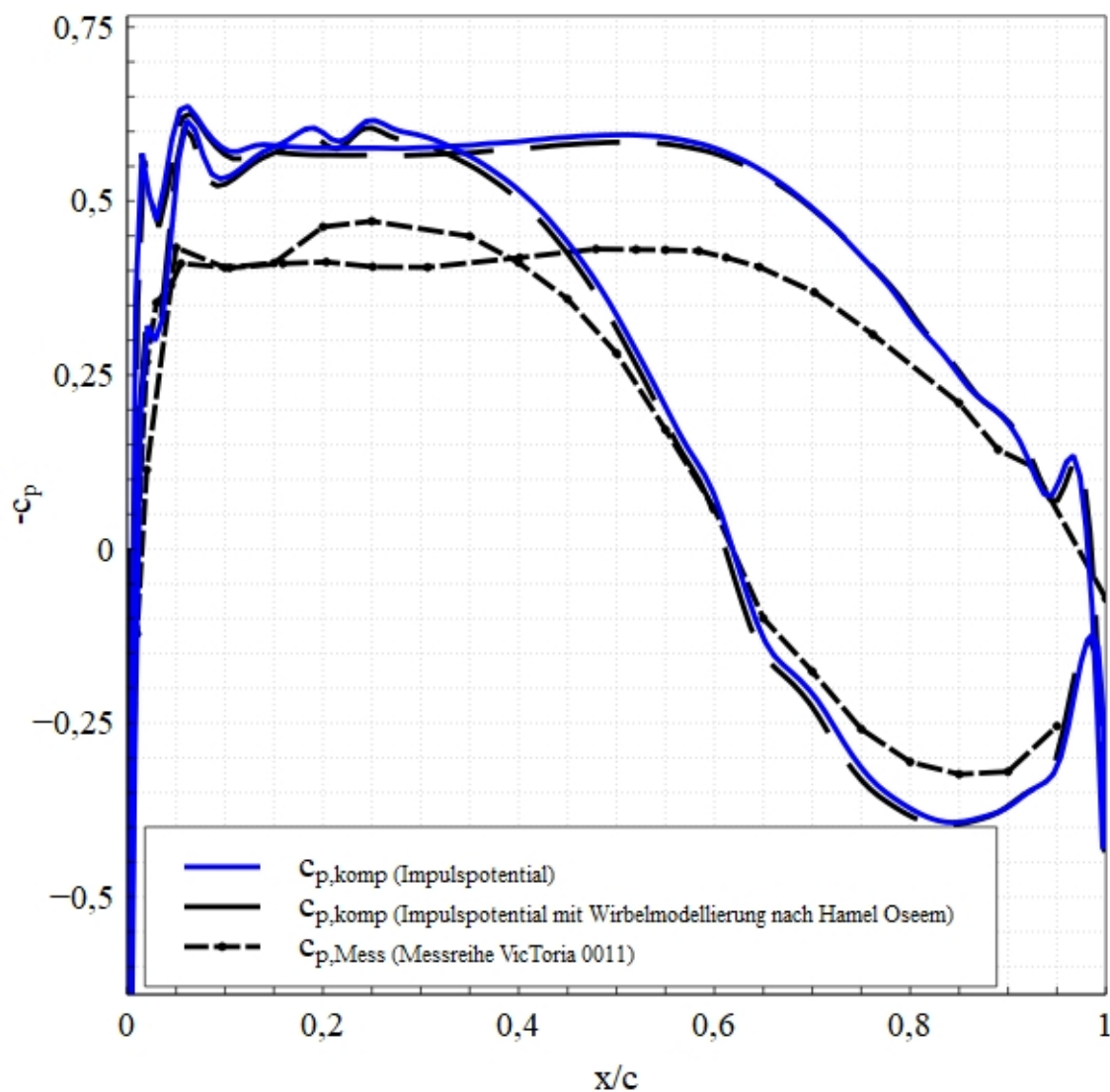


Abbildung 6.5.: Vergleich der Druckbeiwerte mit der Wirbelmodellierung nach Hamel Oseem (Messdaten [CHK18])

Effekt bleibt allerdings relativ gering (Abb. 6.5).

In diesem Ansatz wird der Radius über die Modellierung nach Hamel und Oseem berechnet. Hier wird auf das Problem gestoßen, dass Wirbel quasi am Punkt, an dem die Strömung auf das Profil trifft, entstehen. Hamel und Oseem gehen allerdings bei ihrer Betrachtungsweise nicht von einer rotationsfreien Anströmung aus, sowie es in diesem Fall ist.

7. Ausblick

In dieser Arbeit wird keine geschlossene Formulierung für die kompressible Profilumströmung mittels dem Impulspotential dargestellt. Was gleichzeitig bedeutet, dass weitere Verbesserungen an der Modellierung und Umsetzung der Berechnung getätigt werden können.

Zwei größere Schwierigkeiten, die noch bearbeitet werden müssen, bevor eine physikalisch sinnige Modellierung erfolgen kann, kristallisieren sich bei Bearbeitung dieser Problemstellung heraus. Zum einen muss noch eine schlüssige Modellierung für die Wirbel und Rotation gefunden werden. Hier könnte ein Ansatz verfolgt werden, der die Berechnung der Impulsbilanz in Polarkoordinaten erfasst. Nach ersten Überlegungen könnte so das Paradoxon, welches entsteht, wenn die Entropieentstehung mit kartesischen Koordinaten hergeleitet wird, umgangen werden. Allerdings wird bei der Anwendung der Polarkoordinaten ein Fehler entstehen, da die Darstellung in Polarkoordinaten bei diesem Strömungsverlauf unvorteilhaft ist. Falls die Ergebnisse jedoch vielversprechend sein sollten, könnte in diese Richtung weitergegangen werden und alternative Koordinatensysteme benutzt werden, die die Geometrie besser abbilden. Zum Beispiel beliebig gekrümmte Koordinatensysteme.

Das zweite Problem, welches auftritt ist die Umkehrung des Fehlers an der Unterseite des Tragflügelprofils (Abb. 7.1).

Hier wird deutlich, dass der Fehlereffekt an der Stelle $x \approx 0,65$ umkehrt. Auffällig sind an dieser Stelle zwei Dinge. Zum einen wird die Strömung ab diesem Zeitpunkt so weit abgebremst, dass die Geschwindigkeit kleiner als in der Anströmung wird. Zum anderen kehrt sich in diesem Bereich die Krümmung des Profils um. Aufgrund Letzterem sollte die mathematische Modellierung der Impulsbilanz auch noch einmal in Polarkoordinaten intensiver betrachtet werden, da hierbei die Berechnung des Druckgradienten in Richtung des Radius auch durch die Krümmung beeinflusst wird (7.1).

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \cdot \frac{v_\theta^2}{r} \quad (7.1)$$

Die Krümmung ist definiert als $\kappa_{kr} = \frac{1}{r}$. Aus den Erhaltungsgleichungen für Masse und Energie lässt sich für den isentropen Fall ebenfalls eine Gleichung für den Druckgradienten senkrecht zum Panel bilden (7.2).

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(\rho \cdot v)_j}{\partial x_i} = \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x_j} \cdot \underbrace{\sin(\beta)}_{=0} + (\rho \cdot v) \cdot \frac{\partial \sin(\beta)}{\partial x_i} \quad (7.2)$$

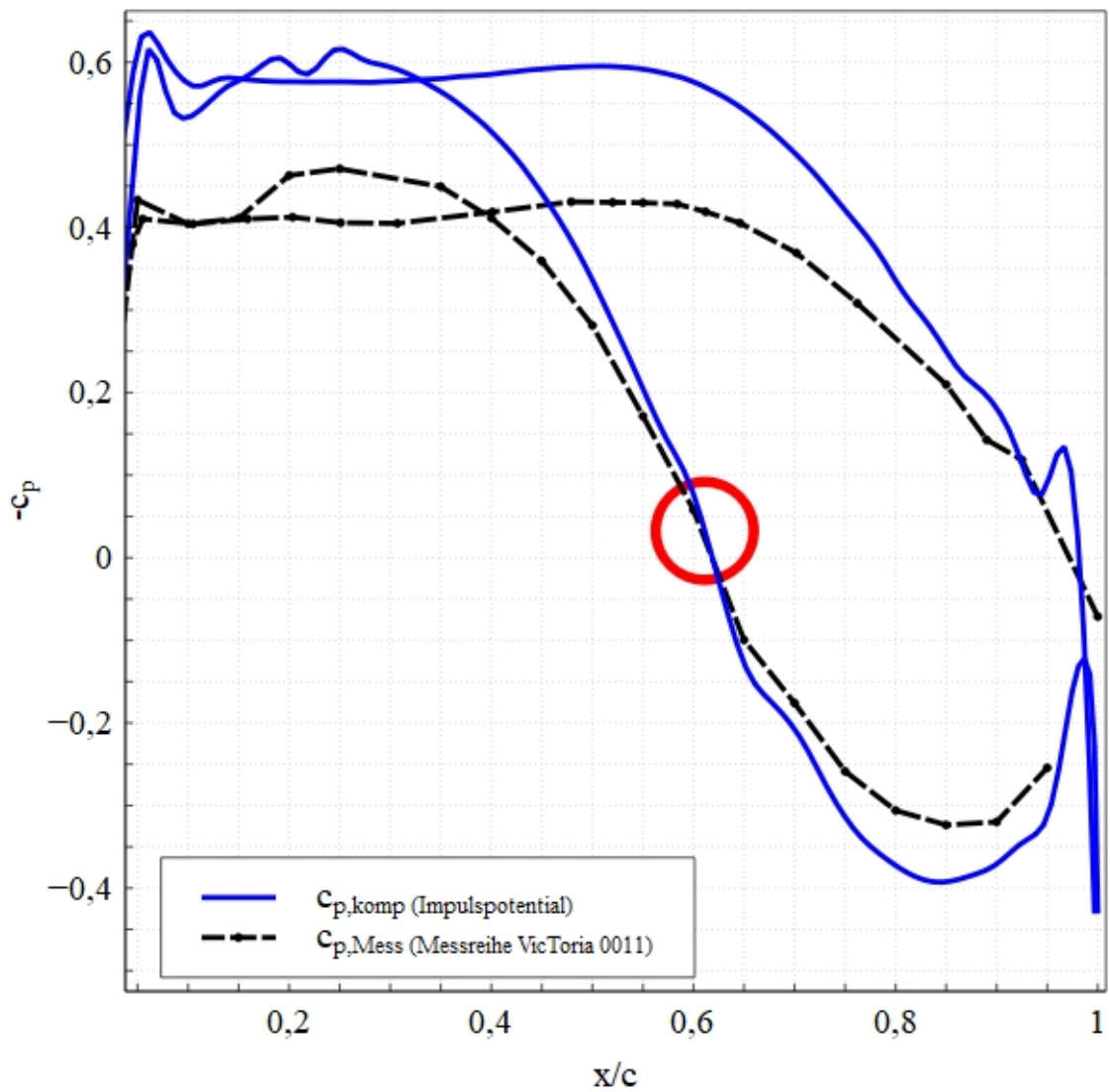


Abbildung 7.1.: Umkehrung des Fehlers an der Unterseite des Profils (Messdaten [CHK18])

Da die Differenz zwischen den Winkel der benachbarten Panels betrachtet wird, kann der Sinus des gerade zu betrachtenden Winkel des Panels als Null angenommen werden. Mit (7.3) eingesetzt in (7.2) ergibt sich (7.4).

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial p} = \frac{\partial \rho \cdot v \sqrt{T_0}}{\partial p_0 \cdot \frac{p}{p_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} = \frac{\partial \dot{m}_{red}}{\partial \frac{p}{p_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = (\rho \cdot v) \cdot \frac{\partial \sin(\beta)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \frac{p}{p_0}}{\partial \dot{m}_{red}} \cdot \sqrt{T_0} \quad (7.4)$$

Der nächste Schritt, wäre die Gradienten miteinander zu vergleichen und so eine neue Geschwindigkeit in translatorischer Richtung zu berechnen. Allerdings ergibt sich bei

diesem Vergleich, nach ersten Betrachtungen, teilweise unlogische und teilweise gar keine Lösungen. Aus diesem Grund sollte aus dem Programm eine zweite Stromlinie berechnet werden, welche einen geringen Abstand zur bisherigen Geometrie hat. Zwischen diesen beiden Stromlinien kann der Gradient des Druckes ebenfalls gebildet werden und zusätzlich als Vergleich und im Optimalfall als Fehlerdetektor genutzt werden.

Das bestehende Programm berechnet momentan nur die Stromlinie direkt um den Körper, auch hier könnten im Folgenden Erweiterungen und Verbesserungen vorgenommen werden. Speziell die Invertierung der Einflussmatrix sollte noch einmal überdacht werden, um eventuell ein anderes Verfahren zu implementieren, da der Gauß–Jordan–Algorithmus für Matrizen dieser Größe Fehler aufweisen kann.

Literaturverzeichnis

- [And84] John David Anderson. *Fundamentals of aerodynamics*. McGraw-Hill Education, 1984.
- [CHK18] Marco Costantini, Ulrich Henne und Christian Klein. *Messdaten aus den Experimenten im DNW-TWG in Rahmen des UAP 1.1.4. Weiterentwicklung der Messtechnik*. DLR VicToria Projekt. Kontakt: Marco.Costantini@dlr.de. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Experimentelle Verfahren. Göttingen, 2018.
- [CK19] Marco Costantini und Christian Klein. "Investigation of shock-induced boundary-layer transition in transonic high Reynolds number flows using Temperature-Sensitive Paints". In: *15th International Conference on Fluid Control, Measurements and Visualization (FLUCOME 2019)*. Hrsg. von Gennaro Cardone. E-Book Proceedings 214. University of Naples Federico II, Mai 2019, S. 1–2. URL: <https://elib.dlr.de/127748/>.
- [Gan87] Uwe Ganzer. *Gasdynamik, 1. Auflage*. Springer Verlag, 1987.
- [Ger18] Detlef Wille Gerhard Merziger Günter Mühlbach. *Formeln und Hilfen Höhere Mathematik, 8. Auflage*. Barsinghausen: Binomi Verlag, 2018. ISBN: 978-3-923 923-36-6.
- [Gör+18] Stefan Görtz u. a. "DLR-Projekt VicToria - Virtual Aircraft Technology Integration Platform". In: *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2018*. 2018. URL: <https://elib.dlr.de/121695/>.
- [Hei13] Frank Kameier Heinz Schade Ewald Kunz. *Strömungslehre, 4. Auflage*. De Gruyter, 2013.
- [Her14] Thomas Reviol Herbert Oertel jr. Martin Böhle. *Strömungsmechanik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 7. Auflage*. Vieweg + Teubner, 2014.
- [Mar01] Harold Youngren Mark Drela. *XFOIL User Prime*. MIT Aero und Astro, Aircraft Inc. Nov. 2001.
- [TK89] P. Thiede und P. Krogmann. "Passive Control of Transonic Shock/Boundary Layer Interaction". In: *Symposium Transsonicum III*. Hrsg. von J. Zierep und H. Oertel. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989, S. 379–388. ISBN: 978-3-642-83584-1.

A. Anhang

A.1. Vergleich der Berechnungen mit Messreihe 2

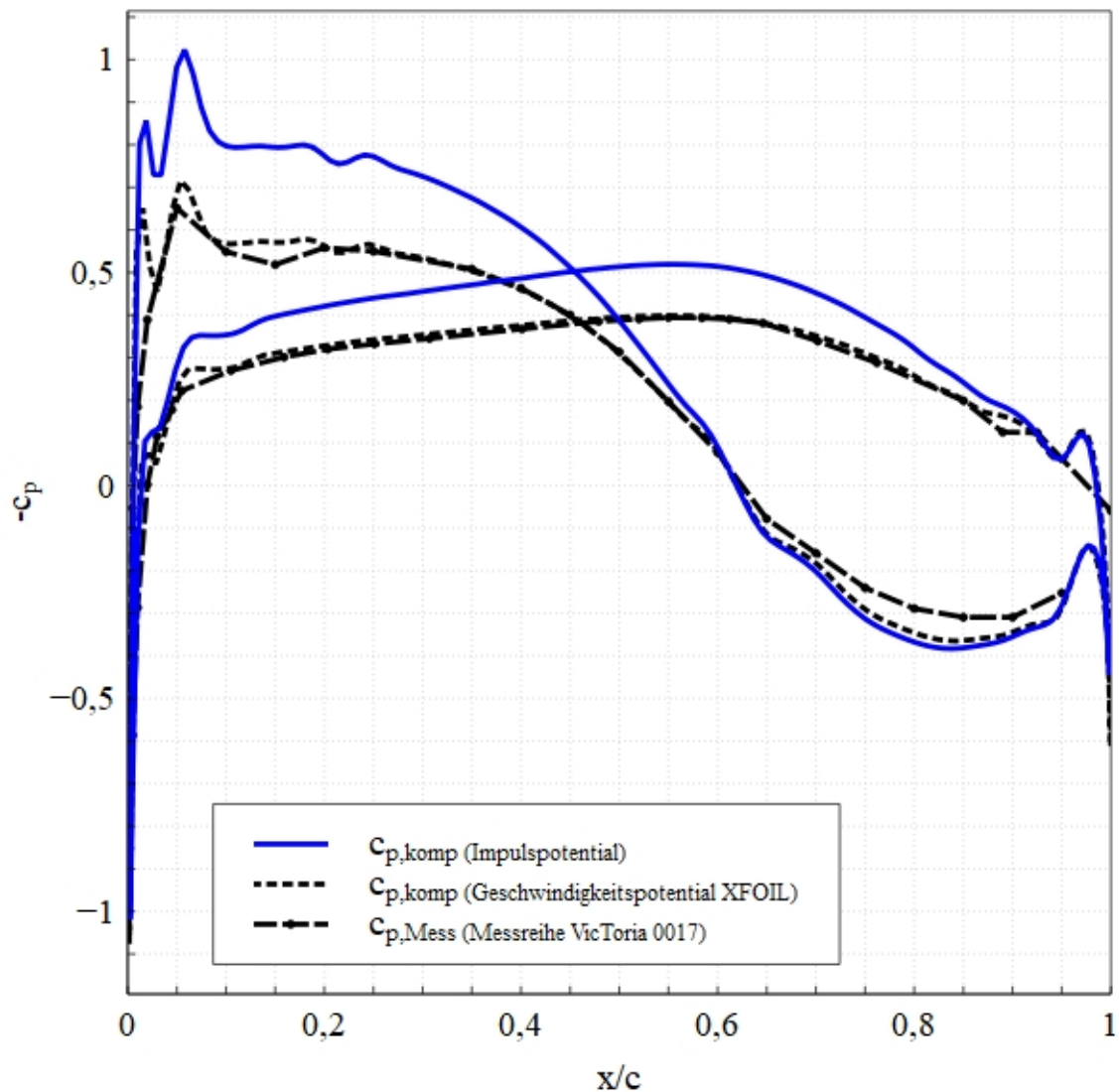


Abbildung A.1.: Vergleich der Berechnungen des Druckbeiwertes mit den Messwerten aus der Messreihe *VicToria_II_11.18_Profil_00530017* [CHK18]

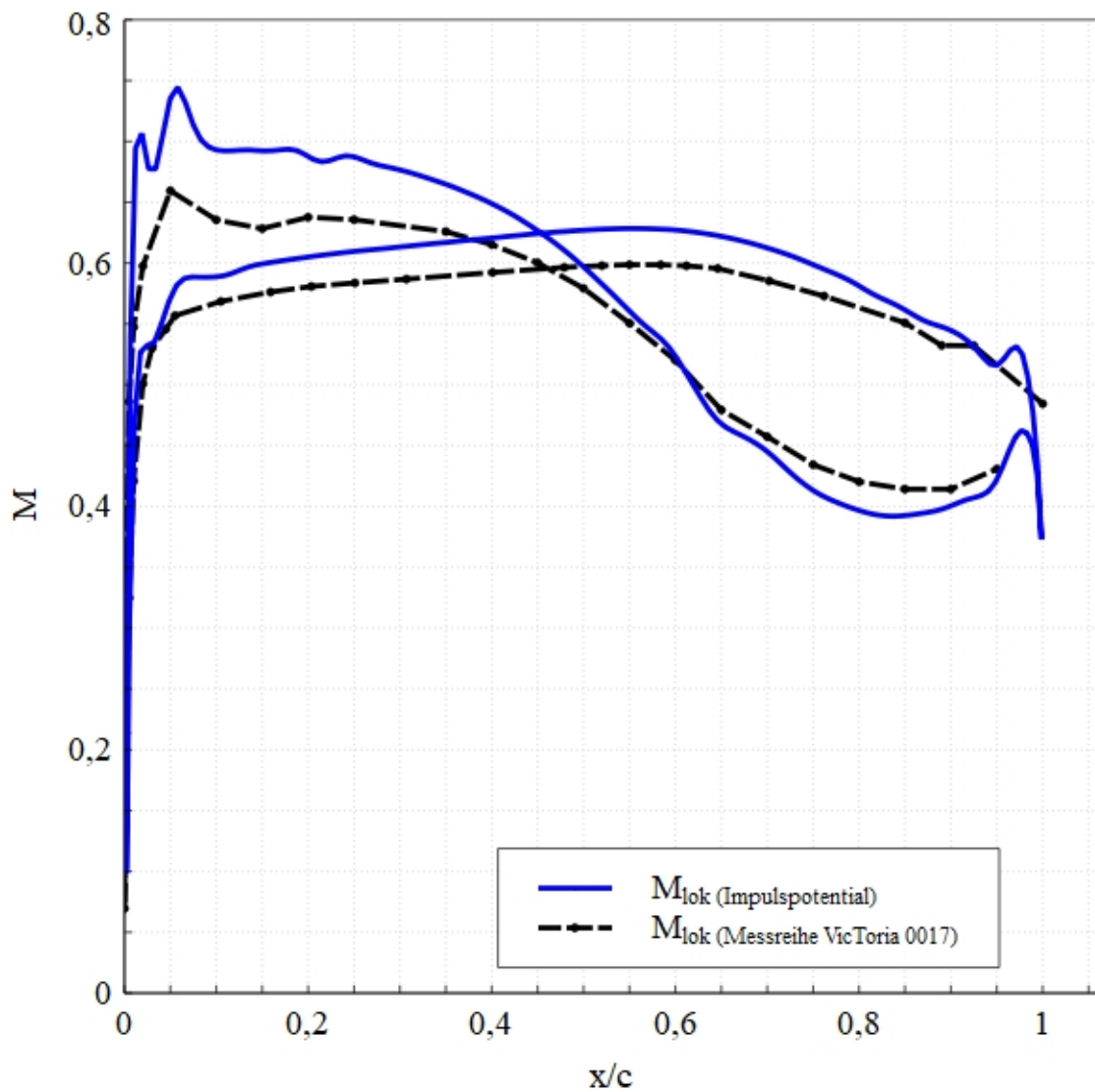


Abbildung A.2.: Vergleich der lokalen Machzahlen der Berechnung mit dem Impulspotentialansatz und der Messreihe *VicToria_II_11.18_Profil_00530011* [CHK18]

A.2. Berechnungscode

Listing A.1: Berechnungscode

```

1 //Berechnung Profilstroemung mittels der Potentialtheorie
  Uebersetzt aus Fortran (Foil)
2 //AIRFOIL SECTION
3 //
4 // THIS PROGRAM CALCULATES THE FLOW AROUND AN AIRFOIL USING
5 // SOURCES AND SINKS DISTRIBUTED ON THE SURFACE PLUS A
6 // SERIES OF VORTECIES DISTRIBUTED ALONG THE CAMBER LINE
7 // TO SATISFY THE KUTTA CONDITION.
8 // AN OPTION TO DISTINGUISH BETWEEN LIFTING AND NON LIFTING
9 // SECTIONS IS AVAILABLE.
10
11 //=====
12 // NP      =NUMBER OF SURFACE COORDINATES
13 // ILIFT   =LIFTPARAMETER. ILIFT=0 FOR NON LIFTING SECTION
14 //         ILIFT=1 FOR LIFTING SECTION
15 // ALFA    =ANGLE OF ATTACK WITH RESPECT TO CORDLINE
16 // C       =CORD LENGTH (BASIS FOR NON DIMENSIONALIZATION)
17 // XP      =CORDWISE COORDINATE
18 // YP      =VERTICAL COORDINATE
19 //         THE COORDINATES SHOULD BE GIVEN GOING CLOCKWISE
20 //         AROUND THE SECTION STARTING AT THE TRAILING EDGE.
21 //=====
22
23 #include <math.h>
24 #include <stdio.h>
25
26
27 //Prototyp
28 double leastsquare( double v, double T, double rho, double
    cp_wk, double kappa, double T_0, double ip, double sv );
29
30 int main()
31 {
32 //Variablen definieren

```

```
33 int v = 2;
34
35 double ILIFT, alpha, M_inf, kappa, Rs, mp_redinf, qP_inf,
    p_inf, p_0, T_inf, T_0, T_0_1, cp_wk, pdyn_inf, cv;
36 double pi = 2. * acos(0.);
37 // ILIFT PARAMETER (1 falls Profil Auftrieb generiert 0 falls
    Profilumstroemung ohne Auftrieb)
38 // Anstroemwinkel alpha
39 // Anstroemmachzahl M_infinity
40 // Isentropenexponent kappa
41 // Gaskonstante R (Mediumabhaengig)
42 alpha = -1.14 * pi/180.;
43 ILIFT = 0.;
44 M_inf = 0.5;
45 kappa = 1.4;
46 Rs = 287.;
47 p_0 = 80000;
48 T_0 = 308.;
49 cp_wk = 1006.;
50 cv = cp_wk - Rs;
51 // T_inf ueber Isentropenbeziehungen
52 T_inf = T_0 * ( 1./((1. + (kappa - 1.)/2. * M_inf * M_inf)));
53 // Berechnung v_inf und rho_inf
54 double rho_inf, v_inf, ip_inf;
55 v_inf = M_inf * sqrt(kappa * Rs * T_inf);
56 p_inf = p_0 * pow(1. + (kappa - 1.)/2. * M_inf * M_inf, -kappa
    /(kappa - 1.));
57 rho_inf = p_inf/(Rs * T_inf);
58 T_0_1 = p_0 - p_inf;
59 ip_inf = v_inf * rho_inf;
60 pdyn_inf = p_0 - p_inf;
61 printf("%lf %lf %lf %lf\n", rho_inf, v_inf, p_inf, T_inf);
62 // Entdimensionalisierungsfaktor C
63 double C = 1.;
64 double *xp, *yp, *xc, *yc, *xc1, *yc1, z, dx1, dy1, *ip_n, *
    cp, *h, *SOR, *dl, *ux, *uy; // 90
65 double *ci, *si;
```



```
66 double *xv, *yv;
67 double *s;
68 double dx, dy;
69 ci = new double[v];
70 si = new double[v];
71 //Hilfsgroessen
72 double x1, y1;
73 //Einlesen der Geometriedaten
74 FILE *max;
75 max = fopen("vici.dat", "r");
76 int np = 0; //Anzahl Geometriepunkte
77 do
78 {
79     np++;
80     fscanf(max, "%lf %lf ", &x1, &y1 );
81     for(int i=0; i<=np-1; i++)
82     {
83     }
84 }while( !feof(max));
85 fclose(max);
86 //Werte in Array einlesen
87 xp = new double[np]; // Punkt der Geometrie auf x-Achse
88 yp = new double[np]; // Punkt der Geometrie auf y-Achse
89 cp = new double[np];
90 dl = new double[np];
91 max = fopen("vici.dat", "r");
92 for(int i=0; i <= np-1; i++)
93 {
94     fscanf(max, "%lf %lf\n", &xp[i], &yp[i]); //ACHTUNG!!
        GEOMETRIE MUSS VOM HINTERKANTENPUNKT IM UHRZEIGERSINN
        EINGELESEN WERDEN
95 }
96 fclose(max);
97
98 if( xp[0] != xp[np-1] || yp[0] != yp[np-1])
99 {
100     printf("ERROR: GEOMETRIE NICHT GESCHLOSSEN\n");
```

```
101 }
102 // Entdimensionalisieren
103 for(int i=0; i<=np-1; i++)
104 {
105     xp[i] = xp[i];
106     yp[i] = yp[i];
107 }
108 //CALCULATE CONTROL POINTS AND SURFACE SLOPES
109 //DEL(J,0)=PANEL SLOPE ANGLE WITH RESPECT TO THE CORDLINE
110 //DEL(J,1)=ANGLE OF OUTWARD NORMAL TO THE SURFACE
111 xc = new double[np-1];
112 yc = new double[np-1];
113 s = new double[np-1];
114 xc1 = new double[np-1];
115 yc1 = new double[np-1];
116 double DEL[(np-1)][2];
117 for(int i = 0; i<=np-2; i++)
118 {
119     xc[i] = (xp[i] + xp[i+1])/2.;
120     yc[i] = (yp[i] + yp[i+1])/2.;
121     dx = xp[i+1] - xp[i];
122     dy = yp[i+1] - yp[i];
123     s[i] = sqrt(dx*dx + dy*dy);
124     if(xp[i+1] != xp[i])
125     {
126         DEL[i][0] = (yp[i+1] - yp[i])/(xp[i+1] - xp[i]);
127         DEL[i][0] = atan(DEL[i][0]);
128
129         if(xp[i+1] < xp[i])
130         {
131             DEL[i][0] = DEL[i][0] + pi;
132         }
133     }
134     if(xp[i+1] == xp[i])
135     {
136         if(i == np-2)
137         {
```

```
138         if (xp[i-1] < xp[i])
139         {
140             DEL[i][0] = -pi/2.;
141         }
142         if (xp[i-1] > xp[i])
143         {
144             DEL[i][0] = pi/2.;
145         }
146     }
147     if (xp[i+2] > xp[i+1])
148     {
149         DEL[i][0] = pi/2.;
150     }
151
152     if (xp[i+2] < xp[i+1])
153     {
154         DEL[i][0] = -pi/2.;
155     }
156 }
157 DEL[i][1] = DEL[i][0] + pi/2.;
158 dx1 = cos( DEL[i][1]) * z;
159 dy1 = sin( DEL[i][1]) * z;
160 xc1[i] = xc[i] + dx1;
161 yc1[i] = yc[i] + dy1;
162 }
163 //CALCULATE THE INFLUENCE MATRIX
164 // Hilfsgroessen
165 double DA, X1, Y1, CDJ, SDJ, F1, F2, TEST, Q, TT, TL, A, B,
    R;
166 int L;
167 // Matrix
168 double F[np][np][2];
169 for(int i = 0; i<=np-2; i++)
170 {
171     for(int l=0; l<=1; l++)
172     {
173         DA = DEL[i][l];
```

```
174
175     if ((l == 0) && (DA > pi/2.))
176     {
177         DA = DA + pi;
178     }
179     ci[l] = cos(DA);
180     si[l] = sin(DA);
181 }
182
183 for(int j = 0; j<=np-2; j++)
184 {
185     if(i == j)
186     {
187         F[i][j][0] = pi;
188         F[i][j][1] = 0.;
189     }
190
191     if(i != j)
192     {
193         X1 = xc[i] - xp[j];
194         Y1 = yc[i] - yp[j];
195         CDJ = cos(DEL[j][0]);
196         SDJ = sin(DEL[j][0]);
197         F1 = X1 * X1 + Y1 * Y1;
198         F2 = -2. * (X1 * CDJ + Y1 * SDJ);
199         TEST = 1. - F2*F2/4./F1;
200         Q = 4. * F1-F2*F2;
201         if(fabs(TEST) > pow(10.,-7))
202         {
203             if(Q < 0.)
204             {
205                 printf("Error: Negativer Wurzelausdruck");
206             }
207
208             Q = sqrt(Q);
209             TT = atan((2.*s[j]+F2)/Q) - atan(F2/Q);
210             TL = log((F1 + (F2 + s[j]) * s[j])/F1);
```

```
211
212     for(int m = 0; m<=1; m++)
213     {
214         L = 1-m;
215         DA = DEL[i][L];
216         if(m == 1 && DA > pi/2.)
217         {
218             DA = DA + pi;
219         }
220         A = X1 * ci[L] + Y1 * si[L] + F2/2. * cos(DEL[j
                ][0] - DA);
221         B = 0.5 * cos(DEL[j][0] - DA);
222         F[i][j][m] = 2./Q * A * TT - B * TL;
223     }
224 }
225 if(fabs(TEST) < pow(10., -7))
226 {
227     F2 = F2/2.;
228     F1 = s[j]/F2;
229     R = 1. + F1;
230
231     for(int m = 0; m<=1; m++)
232     {
233         L = 1-m;
234         DA = DEL[i][L];
235         if( m == 1 && DA > pi/2.)
236         {
237             DA = DA + pi;
238         }
239         A = (X1 * ci[L] + Y1 * si[L]) * F1/F2/R;
240         B = log(R) + 1./R-1.;
241         F[i][j][m] = A - B * cos( DEL[j][0] - DA);
242     }
243 }
244 }
245 }
```

```
246 }
247 //CALCULATE INFLUENCE FROM VORTEX
248 double SUMB;
249 if (ILIFT != 0.)
250 {
251 //Hilfsgroessen
252 int NVTEX = (np - 3)/2;
253 double DBV;
254 SUMB = 0.;
255 //Berechnungsvektoren
256 xv = new double[NVTEX];
257 yv = new double[NVTEX];
258 for (int j = 0; j <= NVTEX-1; j++)
259 {
260     xv[j] = xp[j+1];
261     yv[j] = (yp[j+1] + yp[np-j])/2.;
262     DBV = yv[j] - yp[j+1];
263     SUMB = SUMB + DBV;
264 }
265 for (int i = 0; i <= np-1; i++)
266 {
267     F[i][np-1][0] = 0.;
268     F[i][np-1][1] = 0.;
269
270     for (int j = 0; j <= NVTEX-1; j++)
271     {
272         DBV = xv[j] - xp[j];
273         dx = xc[i] - xv[j];
274         dy = yc[i] - yv[j];
275         R = dx * dx + dy * dy;
276         for (int m = 0; m <= 1; m++)
277         {
278             L = 1 - m;
279             DA = DEL[i][L];
280
281             if (m == 1 && DA > pi/2.)
282             {
```

```
283         DA = DA + pi;
284     }
285     F[i][np-1][m] = F[i][np-1][m] + (dy * cos(DA) - dx
        * sin(DA))/R * DBV;
286 }
287 }
288 }
289 //KUTTA CONDITION
290 for(int j = 0; j <= np-1; j++)
291 {
292     if(j == 0)
293     {
294         F[np-1][j][0] = F[np-2][0][1];
295     }
296     if((j!=0) )
297     {
298         if(j!=np-2)
299         {
300             F[np-1][j][0] = F[np-2][j][1] - F[0][j][1];
301         }
302         else
303         {
304             F[np-1][j][0] = -F[0][np-2][1];
305         }
306     }
307 }
308 }
309 //RHS ELEMENTS
310 //Hilfsgroessen
311 double D1, D2;
312 h = new double[np];
313 for(int j = 0; j <= np-2; j++)
314 {
315     h[j] = -2. * pi * cos(alpha - DEL[j][1]);
316 }
317 if( ILIFT != 0.)
318 {
```

```
319     D1 = DEL[0][0];
320     if( (D1 > pi/2.) || (D1 < -pi/2.) )
321     {
322         D1 = D1 + pi;
323     }
324     D2 = DEL[np-2][0];
325     if((D2 > pi/2.) || (D2 < -pi/2.) )
326     {
327         D2 = D2 + pi;
328     }
329     h[np-1] = 2. * pi      * (cos(alpha - D1) - cos(alpha - D2))
        ;
330 }
331
332 if(ILIFT == 0.)
333 {
334     np = np-1;
335 }
336 //BERECHNUNG DER INVERSEN VON F (EVTL ALS UNTERROUTINE
    EINBAUEN, evtl LU Zerlegung)
337 //HAVE NOW CONSTRUCTED A MATRIX SYSTEM F*SOR=H WHICH MUST BE
338 //SOLVED FOR SOR. NB! SOR(NP)=VORTEX STRENGTH,GAMMA
339 //Hilfsgroessen
340 double SDEL = 1.;
341 double AMAX, ATMP, BTMP, DIV, AMULT;
342 double EPS = pow(10., -7);
343 int IMAX;
344 //F in zweidimensionale Matrix O
345 double O[np][np];
346 for(int i = 0; i<=np-1; i++)
347 {
348     for(int j = 0; j<=np-1; j++)
349     {
350         O[i][j] = F[i][j][0];
351     }
352 }
353 //EINHEITSMATRIX
```



```
354 double FINV[np][np];
355 for(int i = 0; i<=np-1; i++)
356 {
357     for(int j = 0; j<=np-1; j++)
358     {
359         if(i == j)
360         {
361             FINV[i][j] = 1.;
362         }
363         if(i != j)
364         {
365             FINV[i][j] = 0.;
366         }
367     }
368 }
369 //LOCATE MAXIMUM MAGNITUDE O(I,K) ON OR BELOW MAIN DIAGONAL
370 for(int k = 0; k<=np-1; k++)
371 {
372     if(k - np < 0)
373     {
374         IMAX = k;
375         AMAX = fabs(O[k][k]);
376         for(int i = k+1; i<= np-1; i++)
377         {
378             if ((AMAX - fabs(O[i][k])) < 0)
379             {
380                 IMAX = i;
381                 AMAX = fabs(O[i][k]);
382             }
383         }
384         //Interchange rows IMAX and k if IMAX not equal to
385         //k
386         if ((IMAX - k) != 0)
387         {
388             for(int j = 0; j<=np-1; j++)
389             {
390                 ATMP = O[IMAX][j];
```

```

390         O[IMAX][j] = O[k][j];
391         O[k][j] = ATMP;
392         BTMP = FINV[IMAX][j];
393         FINV[IMAX][j] = FINV[k][j];
394         FINV[k][j] = BTMP;
395     }
396     SDEL = -SDEL;
397 }
398 }
399 if ((fabs(O[k][k]) - EPS) <= 0.)
400 {
401     printf("ACHTUNG SINGULAERE MATRIX \n");
402 }
403 SDEL = O[k][k] * SDEL;
404 //DIVIDE PIVOT ROW BY ITS MAIN DIAGONAL ELEMENT
405 DIV = O[k][k];
406 for(int j = 0; j <= np-1; j++)
407 {
408     O[k][j] = O[k][j]/DIV;
409     FINV[k][j] = FINV[k][j]/DIV;
410 }
411 //REPLACE EACH ROW BY LINEAR COMB. WITH PIVOT ROW
412 for(int i = 0; i <= np-1; i++)
413 {
414     AMULT = O[i][k];
415     if((i - k) != 0)
416     {
417         for(int j = 0; j <= np - 1; j++)
418         {
419             O[i][j] = O[i][j] - AMULT * O[k][j];
420             FINV[i][j] = FINV[i][j] - AMULT * FINV[k][j];
421         }
422     }
423 }
424 }
425 printf("Value of nonzero Determinant %f\n", SDEL);
426 //ENDE BERECHNUNG INVERSEN

```

```
427
428 //BERECHNUNG SOR = FINV * H
429 SOR = new double[np];
430 for(int i = 0; i <= np - 1; i++)
431 {
432     SOR[i] = 0.;
433     for(int k = 0; k <= np - 1; k++)
434     {
435         SOR[i] = SOR[i] + FINV[i][k] * h[k];
436     }
437 }
438 if(ILIFT != 0)
439 {
440     cl = 2. * SOR[np-1] * SUMB;
441 }
442 //CALCULATE TANGENTIAL VELOCITIES AT THE CONTROL POINT
443 double SUMKC, SMAX, SUM, CS, ds, SUMx, SUMy;
444 double *us;
445 ip_n = new double[np]; //Rho * v aus Impulspotential
446 us = new double[np];
447 ux = new double[np];
448 uy = new double[np];
449 int n1 = np;
450 if(ILIFT != 0.)
451 {
452     n1 = n1 - 1;
453 }
454 double *ipxs2, *ipys2, *ips2;
455 ipxs2 = new double[np];
456 ipys2 = new double[np];
457 ips2 = new double[np];
458 SUMKC = 0.;
459 SMAX = 0.;
460 for(int i = 0; i <= n1 - 1; i++)
461 {
462     dx = xp[i+1] - xp[i];
463     dy = yp[i+1] - yp[i];
```

```

464     ds = sqrt(dx*dx + dy*dy);
465     if (SOR[i] > SMAX)
466     {
467         SMAX = SOR[i];
468     }
469     SUMKC = SUMKC + SOR[i] * ds;
470     SUM = 0.;
471     for(int j = 0; j<= np-1; j++)
472     {
473         SUM = SUM + SOR[j] * F[i][j][1];
474     }
475     DA = DEL[i][0];
476     CS = cos(alpha - DA);
477     if (DEL[i][0] > pi/2.)
478     {
479         DA = DEL[i][0] + pi;
480     }
481     ip_n[i] = cos(alpha - DA) + SUM/(2. * pi);
482     CS = CS * ip_n[i];
483     us[i+1] = copysign(ip_n[i], CS);
484     ux[i] = ip_n[i] * cos(DA);
485     uy[i] = ip_n[i] * sin(DA);
486 }
487 //Einfuehrung des maximalen reduzierten Massenstroms
488 double mp_redmax, qmp_redinf, pi_krit;
489 mp_redmax = pow((1. + kappa)/2., (kappa + 1.)/(2. - 2.* kappa))
         * sqrt(kappa/Rs);
490 qmp_redinf = mp_redinf/mp_redmax;
491 pi_krit = pow((kappa + 1.)/2., kappa/(1. - kappa));
492
493 //Berechnung der cp Verteilung kompressibel (Unterschall) und
         inkompressibel (nach Geschwindigkeitspotential)
494 // deltaP_inf Totaldruckverhaeltnis der Anstroemung
495 double *cp_ink, *cp_komp, *cp_bc, *mp_red, *M_is, *M, *
         cp_kompsupersonic, *qmp_red, *qP_start, *qP, qP_Msupersonic
         , M_ref, T_ref, v_ref, rho_ref, sv, deltap, p1;
496 cp_ink = new double[np];

```

```
497 mp_red = new double[np];
498 cp_komp = new double[np];
499 cp_bc = new double[np];
500 M = new double[np];
501 M_is = new double[np];
502 cp_kompsupersonic = new double[np];
503 qmp_red = new double[np];
504 qP_start = new double [np];
505 qP = new double[np];
506
507 qP_inf = p_inf/(p_0);
508 mp_redinf = ip_inf * sqrt(T_0)/(p_0);
509
510 //Berechnung der Entropiezunahme von der Anstroemung zum
    Staupunkt
511 double rho_sp, delta_s, ds_test, k1, k2, k3, f1, f2, f3;
512 rho_sp = pow(T_0/T_inf, (1. - kappa -kappa * sv)/(kappa - 1.)
    ) * rho_inf;
513
514 //Einfuehren der Variablen der Stroemungsgrößen die aus IP
    berechnet werden
515 double *rho, *v_panel, *ip, *T, *v_hverl,*p, *cp_hverl, *
    rho_is, rho_tot, *v_panel_is, *T_is, *pstat, *pstat_iss2, *
    ptot, *pstat_is, *ptot_is, *omega_rot, m_pred, *gradp,
    dwink, *grad2;
516 rho = new double[np];
517 v_panel = new double[np];
518 T = new double[np];
519 ip = new double[np];
520 rho_is = new double[np];
521 v_panel_is = new double[np];
522 T_is = new double[np];
523 pstat = new double[np];
524 pstat_is = new double[np];
525 ptot = new double[np];
526 ptot_is = new double[np];
527 T = new double[np];
```

```
528 v_hverl = new double[np];
529 p = new double[np];
530 cp_hverl = new double[np];
531 omega_rot = new double[np];
532 pstat_iss2 = new double[np];
533 gradp = new double[np];
534 grad2 = new double[np];
535 ////Variablen fuer Hamel Oseem Wirbelmodellierung
536 double nu, r1, tw;
537 nu = 14.9e-6;
538 tw = 1./v_inf;
539 r1 = sqrt(nu * tw);
540 double kr, T_ges_lok, p_ges_lok, mp_red_gr, mp_red_gr1,
    dq_dmpred, mp_red_gr2, qmp_red_gr, qmp_red_gr1, qmp_red_gr2
    , qP_gr, qP_gr1, qP_gr2, qT_gr, T_gr, p_gr, rho_gr, v_gr,
    grad1, dT, *qp_grad, *mp_red_grad;
541
542 //Berechnung rho * v dimensionsbehaftet
543 for(int i = 0; i <= np-1; i++)
544 {
545     ip[i] = ip_n[i]* rho_inf * v_inf;
546 }
547
548 double m_preds2, qmp_reds2, qPs2;
549
550 for(int j = 0; j <= np-1; j++)
551 {
552     mp_red[j] = ip[j] * sqrt(T_0)/(p_0);
553     qmp_red[j] = mp_red[j] * (pow((1. + kappa)/2., (kappa + 1.)
        /(2.* kappa - 2.)) * sqrt(Rs/kappa));
554     qP[j] = pi_krit + (1. - pi_krit) * sqrt(1. - qmp_red[j] *
        qmp_red[j]);
555     M_is[j] = sqrt(2./(kappa - 1.) * (pow(qP[j], (1. - kappa)/
        kappa) - 1.));
556     T_is[j] = pow(qP[j], (kappa - 1.)/kappa) * T_0;
557     v_panel_is[j] = M_is[j] * sqrt(kappa * Rs * T_is[j]);
558     rho_is[j] = ip[j]/v_panel_is[j];
```

```
559 pstat_is[j] = qP[j] * p_0;
560 cp_komp[j] = (pstat_is[j] - p_inf)/(0.5 * rho_inf * v_inf *
    v_inf);
561 ptot_is[j] = pstat_is[j]/pow(T_is[j]/T_0, kappa/(kappa - 1.));
562 cp_ink[j] = (1. - pow(ip[j]/ip_inf,2.));
563 }
564
565 double ip_sp;
566 int sp;
567 ip_sp = ip[0];
568 sp = 0;
569
570 //Definieren des Staupunktes
571 for(int i = 1; i<=np-2; i++)
572 {
573     if(ip[i] < ip_sp)
574     {
575         ip_sp = ip[i];
576         sp = i;
577     }
578 }
579 printf("%d\n", sp);
580 //HAMEL OSEEM
581 //Berechnung der Stromlinie OBERSEITE
582 int j = sp;
583 k1 = T_0;
584 k2 = T_is[j];
585 rho[j+1] = rho_inf;
586 do
587 {
588     j++;
589     do
590     {
591         f1 = ip[j] - sqrt((T_0 * cp_wk - k1 * cp_wk)/(0.5 + 0.0625 *
            r1 * r1 * pow(1./(rho_inf * pow(k1/T_inf, 1./(kappa - 1.)
            )),2.) * pow( (rho_inf * pow(k1/T_inf, 1./(kappa - 1.)) *
            - rho[j-1])/(xc[j] - xc[j-1]) ,2.) ) *
            ) *
            ) *
```

```

    rho_inf * pow(k1/T_inf, 1./(kappa - 1.));
592 f2 = ip[j] - sqrt((T_0 * cp_wk - k2 * cp_wk)/(0.5 + 0.0625 *
    r1 * r1 * pow(1./( rho_inf * pow(k2/T_inf, 1./(kappa - 1.))
    ),2.) * pow( (rho_inf * pow(k2/T_inf, 1./(kappa - 1.)) * -
    rho[j-1])/(xc[j] - xc[j-1]) ,2.)          ) * rho_inf
    * pow(k2/T_inf, 1./(kappa - 1.));
593
594 k3 = k2 - f2/(f2 - f1) * (k2 - k1);
595 f3 = ip[j] - sqrt((T_0 * cp_wk - k3 * cp_wk)/(0.5 + 0.0625 *
    r1 * r1 * pow(1./( rho_inf * pow(k3/T_inf, 1./(kappa - 1.))
    ),2.) * pow( (rho_inf * pow(k3/T_inf, 1./(kappa - 1.)) * -
    rho[j-1])/(xc[j] - xc[j-1]) ,2.)          ) * rho_inf
    * pow(k3/T_inf, 1./(kappa - 1.));
596 k1 = k2;
597 k2 = k3;
598 }while(fabs(f3) >= 0.00001);
599 T[j] = k3;
600 rho[j] = rho_inf * pow(T[j]/T_inf, 1./(kappa - 1.));
601 v_hverl[j] = ip[j]/rho[j];
602 p[j] = Rs * rho[j] * T[j];
603
604 cp_hverl[j] = (p[j] - p_inf)/(0.5 * rho_inf * v_inf *v_inf );
605
606
607 }while(j<np-2);
608 //UNTERSEITE
609 j = sp;
610 k1 = T_0;
611 k2 = T_is[j];
612 rho[j-1] = rho_inf;
613 do
614 {
615 j--;
616 do
617 {
618 f1 = ip[j] - sqrt((T_0 * cp_wk - k1 * cp_wk)/(0.5 + 0.0625 *
    r1 * r1 * pow(1./( rho_inf * pow(k1/T_inf, 1./(kappa - 1.))

```



```

        ),2.) * pow( (rho_inf * pow(k1/T_inf, 1./(kappa - 1.)) * -
rho[j-1])/(xc[j] - xc[j-1]) ,2.)          ) * rho_inf
        * pow(k1/T_inf, 1./(kappa - 1.));
619 f2 = ip[j] - sqrt((T_0 * cp_wk - k2 * cp_wk)/(0.5 + 0.0625 *
r1 * r1 * pow(1./(rho_inf * pow(k2/T_inf, 1./(kappa - 1.)))
,2.) * pow( (rho_inf * pow(k2/T_inf, 1./(kappa - 1.)) * -
rho[j-1])/(xc[j] - xc[j-1]) ,2.)          ) * rho_inf
        * pow(k2/T_inf, 1./(kappa - 1.));
620
621 k3 = k2 - f2/(f2 - f1) * (k2 - k1);
622 f3 = ip[j] - sqrt((T_0 * cp_wk - k3 * cp_wk)/(0.5 + 0.0625 *
r1 * r1 * pow(1./(rho_inf * pow(k3/T_inf, 1./(kappa - 1.)))
,2.) * pow( (rho_inf * pow(k3/T_inf, 1./(kappa - 1.)) * -
rho[j-1])/(xc[j] - xc[j-1]) ,2.)          ) * rho_inf
        * pow(k3/T_inf, 1./(kappa - 1.));
623 k1 = k2;
624 k2 = k3;
625 } while(fabs(f3) >= 0.00001);
626 T[j] = k3;
627 rho[j] = rho_inf * pow(T[j]/T_inf, 1./(kappa - 1.));
628 v_hverl[j] = ip[j]/rho[j];
629 p[j] = Rs * rho[j] * T[j];
630
631 cp_hverl[j] = (p[j] - p_inf)/(0.5 * rho_inf * v_inf * v_inf );
632
633 } while(j >= 0);
634     FILE *tom;
635
636     tom = fopen("cp_Verteilung.dat", "w");
637     for( int i = 0; i <= np - 2 ; i++)
638     {
639         fprintf(tom, "%10.5lf %10.5lf %10.5lf\n", xc[i],
            cp_komp[i], cp_hverl[i] );
640     }
641     fclose(tom);
642
643     FILE *fin;

```

```
644
645     fin = fopen("Berechnungsergebnisse.dat", "w");
646     for( int i = 0; i <= np - 2 ; i++)
647     {
648         fprintf(fin, "%lf %lf %15.10lf %10.5lf %10.5lf %10.5lf
        %10.5lf %lf\n", xc[i], yc[i], xp[i], yp[i], pstat[
        i], T_is[i], v_panel_is[i], ip[i]);
649     }
650     fclose(fin);
651     delete[] yp, xp, h, ux, uy, ip, ip_n, SOR, cp_ink, cp_komp,
        mp_red, rho, v, v_panel, T, cp_hverl;
652
653     return(0);
654 }
```
